قوانين مهمة

1- $\arg (Z_1 . Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$
$= \Theta_1 + \Theta_2$
2- $\arg (Z_1 / Z_2) = \arg Z_1 - \arg Z_2 ,\ Z_2 \neq 0$
$= \Theta_1 - \Theta_2$
3- $\arg (1 / Z) = - \arg Z ,\ Z \neq 0$
$= - \Theta$
4- $| Z_1 . Z_2 | = | Z_1 | . | Z_2 | = r_1 . r_2$
5- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{r_1}{r_2}, Z_2 \neq 0$

Proof (1) :
Let $Z_1 = r_1 (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1)$ & $Z_2 = r_2 (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2)$
$\therefore Z_1 . Z_2 = r_1 r_2 [(\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1). (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2)]$
$= r_1 r_2 [(\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2) + i (\sin \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_2 \cos \Theta_1)]$
$= r_1 r_2[\cos (\Theta_1 + \Theta_2) + i \sin (\Theta_1 + \Theta_2)]$

يترك الباقي كواجب للطالب

ملاحظة مهمة/ نستنتج من خلال هذه القوانين بأنه عندما تكون هناك **عملية ضرب** للأعداد المركبة فإننا **نقوم بضرب أنصاف أقطار هذه الأعداد وبجمع زواياها**، وعندما تكون **عملية قسمة** فإننا **نقسم أنصاف الأقطار ونطرح الزوايا**.

Ex .: let $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 1 - i \sqrt{3}$ find $\arg (Z_1 . Z_2)$

Sol .: $Z_1 = 1 + i \Rightarrow r_1 = \sqrt{2} , \quad \Theta_1 = \frac{\Pi}{4}$
$Z_2 = 1 - i \sqrt{3} \Rightarrow r_2 = 2, \Theta_2 = \frac{-\Pi}{3}$

Since $Z_1 . Z_2 = r_1 r_2[\cos (\Theta_1 + \Theta_2) + i \sin (\Theta_1 + \Theta_2)]$

$\therefore \quad Z_1 . Z_2 = 2 \sqrt{2} [\cos (\frac{\Pi}{4} + \frac{-\Pi}{3}) + i \sin (\frac{\Pi}{4} + \frac{-\Pi}{3})]$

$\therefore \arg (Z_1 . Z_2) = \frac{\Pi}{4} + \frac{-\Pi}{3} = -\frac{\Pi}{12}$

س/ بدون استخدام **الصيغة القطبية** اثبت أن العدد المركب الناتج من($Z_1 \cdot Z_2$) يكون عدد مركب بنصف قطر **r** هو($2\sqrt{2}$) وزاوية هي ($-\frac{\Pi}{12}$).

تمارين متنوعة

س1/ بفرض أن $Z_1 \cdot Z_2 \neq 0$ استخدم الصيغة القطبية (r , Ө) لإثبات أن:

$$\operatorname{Re}(Z_1.\overline{Z}_2) = |Z_1||Z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

س2/ استخدم الصيغة القطبية لإثبات أن $i\,(1-i\sqrt{3})\,(\sqrt{3}+i) = 2 + i\,2\sqrt{3}$

Q3/suppose that $Z_1 \cdot Z_2 \neq 0$ use the polar form to show that

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Q4/ Prove or disprove Arg $(Z_1 . Z_2) = \operatorname{Arg} Z_1 + \operatorname{Arg} Z_2$

Hint: $Z_1 = -1$ and $Z_2 = i$

Q5/ Show that: $|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$

Q6/ Prove that $\sqrt{2}\,|Z| \geq |\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)|$

Q**7/ Prove that:**

1) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2|$ **Hint: let** $|Z_1| = |Z_1 + Z_2 + (-Z_2)|$,

$|Z_2| = |Z_2 + Z_1 + (-Z_1)|$

2) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 - Z_2|$ **Hint: let** $|Z_1| = |Z_1 - Z_2 + Z_2|$

$|Z_2| = |Z_2 - Z_1 + Z_1|$

Q8/ let $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = \sqrt{3} - i$ find arg (Z_1 / Z_2), sol. = $\frac{5\Pi}{12}$

س9/

إذا كان $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = 1-i$ أوجد قيمة $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2 - i}\right)$.

س10/

إذا كان $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i$ و $z_3 = i$ أوجد قيمة كل من $\operatorname{Re}\left(\frac{iz_1}{2z_2 + z_3}\right)$ و $Arg\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right)$.

س11/ let $z_1 = 4-5i$, $z_2= 2+3i$ find in the form $(x+iy)$

1- $(z_1+z_2)^2$

2- $\frac{z_2}{z_1}$

3- $(1+i)^8$

س12/برهن ان : $|z_1 - z_4| \le |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4|$

س13/ ارسم

1) $Im(z^2) = 2$ 2) $\left|\frac{2z-i}{-iz-2}\right| \le 1$ 3) $\frac{1}{z} = \bar{z}$ 4) $Re(z + 2 - 2i) = 3$

س14/اوجد الجزء الحقيقي والجزء الخيالي لما يأتي:

1) $f(z) = \frac{z}{1+z}$ 2) $f(z) = \frac{z}{z+\bar{z}}$