الفصل التاسع / الجهد الكهربائي
Electric Potential

(9–1) فرق الجهد والجهد الكـــهربائي
Voltage Difference and Electric Potential

هناك حقيقة أصبحت معروفة ، وهي عند وضع شحنة كهربائيـــة q في مجـــال كهربائي سيؤثر عليها المجال بقوة مقدارها qE ويكون اتجاهها مع اتجاه المجال الكهربائي. وإذا أردنا أن نمسك هذه الشحنة في مكانها فلابد أن نؤثر عليها بقوة مقدارها $-qE$.

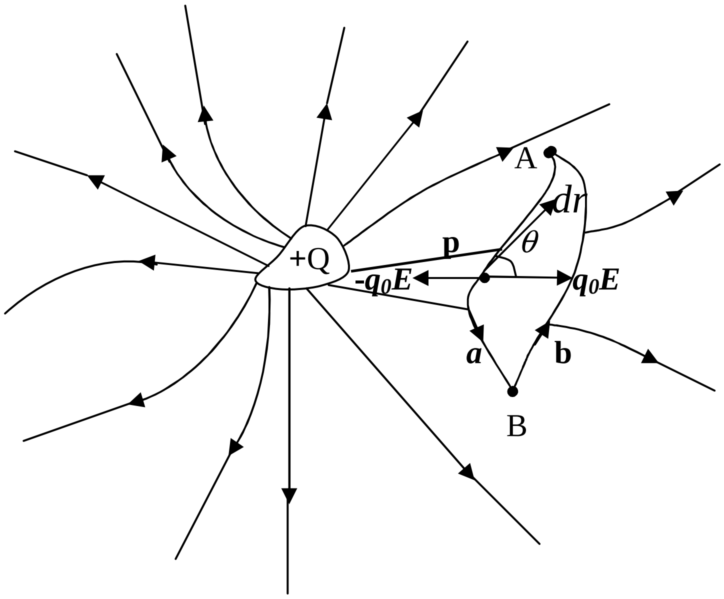
لنعتبر حالة شحنة اختبارية موجبة q_0 موجودة أصلاً في النقطة p داخل مجال كهربائي غير منتظم كما في الشكل (9–1). فلو أردنا تحريكها إلى النقطة B على طول المسار a للزم علينا بذل شغل بعامل خارجي ضد القوة الكهربائية بحيث تبقى حركـــة الشحنة دائماً في حالة اتزان. وهذا الشغل يساوي الزيادة في الطاقة الكامنة للشحنة*.

إن فرق الجهد بين النقطتين A و B داخل المجال الكهربائي هو الشغل المبذول ضد القوة الكهربائية لنقل وحدة شحنة الاختبار الموجبة من A إلى B. ويعّرف فـــرق الجهد بين النقطتين A و B بأنه الشغل المنجز W_{AB} لوحدة الشحنة، أي :

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \qquad \text{(1-9)}$$

إن وحدات SI لفرق الجهد هي جول لكل كولوم. وسنطلق على هذه الكمية المشتقة اسم فولت V نسبة إلى العالم الإيطالي اليساندرو فولتا (1745–1827).وهناك أجزاء لهذه الوحدة تستعمل لقياس فروق الجهد الصغيرة كالملي فولت mV الذي يعادل واحداً من ألف من الفولت ،والمايكروفولت μV وقدرهُ واحد من مليون من الفولت. أما فروق الجهد الكبيرة يعبر عنها بالكيلو فولت kV الذي يعادل ألف مـــن الفولـــت ،والميكافولت MV وقدرهُ مليون فولت. وحيث أن الشغل كمية عددية، فان فرق الجهد كمية عددية أيضاً.

*** من الجدير بالذكر ان الشغل هنا لا يعتمد على المسار المتخذ لذا فان الشغل اللازم لتحريك الشحنة q_0 من B إلى A على طول المسار b يساوي تماماً الشغل اللازم لتحريكها على طول المسار a. ويصبح ذلـــك أيـــضا إذا تحركت الشحنة بالاتجاه المعاكس لاتجاه الحركة الأول.**



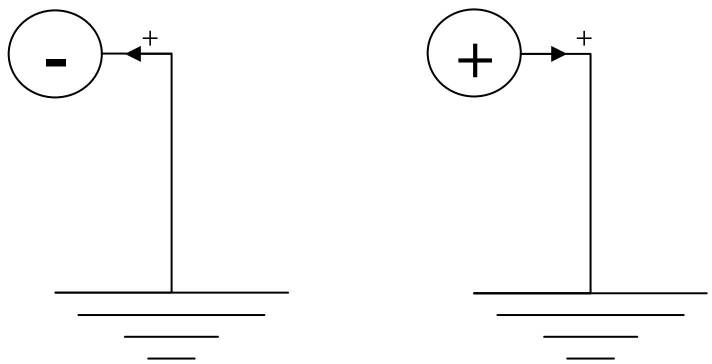
الشكل (9–1) : فرق الجهد بين نقطتين واقعتين في مجال كهربائي.

لقياس الجهد عند أي نقطة، اتفق أن يكون جهد النقاط البعيدة جداً عن الشحنات مساوياً إلى صفر. وفي حالتنا لو اخترنا النقطة A في المالانهاية لأصبح الجهد V_A صفراً، وبالتعويض في المعادلة (9–1) نحصل على الجهد الكهربائي عند النقطة B. إذن تعريف الجهد في نقطة ما هو عبارة عن الشغل لوحدة الشحنة الواجب إنجازه لنقل شحنة اختبارية موجبة من المالانهاية إلى تلك النقطة (أو من نقطة جهد صفر إلى النقطة المعنية) والعلاقة الرياضية هي :

$$V = \frac{W}{q_0} \qquad \text{......................(2-9)}$$

ولابد هنا من الإشارة إلى نقطة مهمة تتعلق بفرق الجهد وهي اعتبار جهد الأرض يساوي صفراً واتخاذه مرجعاً قياسياً لكثير من مسائل الدوائر الكهربائية. ولإيضاح ذلك سنعتبر كرتين مشحونتين إحداهما موجبة ويرمز لها بالعلامة (+) والأخرى سالبة ويرمز لها بالعلامة (–) كما مبين في الشكل (9–2). عند توصيل كل من الكرتين على انفراد بالأرض نجد أن كلتيهما تفقد ما عليها من شحنة كهربائية، ويفسر ذلك بان الشحنة الكهربائية في حالة الكرة الموجبة قد سرت منها إلى الأرض (الجهد الكهربائي للكرة الموجبة الشحنة اكبر من الجهد الكهربائي للأرض ولذلك فان

الشحنة قد سرت من الكرة إلى الأرض حتى أصبح جهد الكرة صفراً). وفي حالة الكرة السالبة فان كهربائية موجبة قد سرت من الأرض إلى الكرة حتى تعادلت الشحنتان على الكرة (يقال إن الجهد الكهربائي للأرض اكبر من الجهد الكهربائي للكرة السالبة الشحنة ولذلك فان الشحنة الموجبة قد سرت من الأرض إلى الكرة حتى أصبح جهد الكرة صفراً).وفي كلتا الحالتين فان الكرتين قد فقدتا شحنتيهما. غير إن الحال مع الكرة الأرضية يختلف، فبسبب حجمها الهائل فان كهربائيتها لا تتأثر بأي شحنة كهربائية تسري إليها أو منها إلى موصل مهما كانت قيمة هذه الشحنة، ولذلك اعتبر الجهد الكهربائي للأرض صفراً واتخذ لذلك مرجعاً لقياس الجهد. فإذا قيل إن لموصل ما جهداً موجباً فان هذا يعني انه إذا وصل بالأرض فان الشحنة الكهربائية تسري منه إلى الأرض والعكس صحيح إذا كان جهد الموصل سالباً.



الشكل (9-2) : توصيل كرتين مشحونتين بالأرض، ويلاحظ اتجاه سريان الكهربائية لكل منهما حتى تفقد ما عليها من شحنة.

مثال (9-1)

إذا كان فرق الجهد بين قطبي بطارية هو $12V$ فما مقدار الشغل الذي تبذله البطارية لنقل إلكترون من قطبها الموجب إلى السالب. وكم لنقله بالاتجاه المعاكس.

الحل :

الانتقال بالإلكترون من قطب البطارية الموجب إلى السالب يعني المرور خلال انخفاض جهد وعليه فان $V = -12Volt$، لذا فان الشغل المبذول في هذه الحالة هو:

$$W = \Delta V q = (-12)(-1.6\times10^{-19}) = 1.9\times10^{-18}\,J$$

أما ترك الإلكترون وشأنه سيجذبه نحو القطب الموجب وهذا يعني أنها تكون عند الجهد الأعلى أي $V = +12Volt$ لذا فالشغل المبذول في هذه الحالة يكون :

$$W = \Delta V q = (+12)(-1.6\times10^{-19}) = -1.9\times10^{-18}\,J$$

(9–2) علاقة فرق الجهد بشدة المجال
The Relation between Voltage Difference and Field Intensity

لإيجاد العلاقة بين فرق الجهد وشدة المجال، لابد من حساب الشغل الذي يلزم إنجازه من قبل عامل خارجي لتحريك شحنة اختبار موجبة q_0 في مجال غير منتظم وعلى مسار متموج بين النقطتين A و B بدون تعجيل كما في الشكل (9–1). فإذا فرضنا الشحنة q_0 تتحرك على طول المسار a بدون تعجيل فهذا يشترط أن تكون q_0 في أية نقطة على طول المسار بين A و B واقعة تحت تأثير قوتين متعاكستين الأولى مسلطة من قبل المجال الكهربائي ومقدارها $+q_0E$ وتكون بنفس اتجاه المجال والثانية يسلطها عامل خارجي مقدارها $-q_0E$ وتكون بعكس اتجاه المجال وبهذا يصبح الشغل المنجز:

$$W_{AB} = -\int_A^B q_0 \cos\theta dr$$

أو

$$\frac{W_{AB}}{q_0} = \int_A^B E\cos\theta dr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{-}9)$$

حيث dr إزاحة تفاضلية على المسار a يعمل زاوية θ مع اتجاه المجال الكهربائي. وإذا قارنا المعادلتين (9–1) و (9–3) نجد إن فرق الجهد بين النقطتين A و B مساوٍ إلى:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{-}9)$$

وبربط المعادلتين (9–3) و (9–4) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} V_B - V_A &= \frac{W_{AB}}{q_0} \\ &\text{او} \\ V_B - V_A &= \frac{\Delta(p.E)}{q_0} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{-}9)$$

أي أن مقدار الشغل المنجز علـــى هـــذه الـــشحنة q_0 يـــساوي الـــتغير في طاقتـــها الكامنة$(P.E)$.

وفي الحالات الخاصة التي يكون فيها المجال منتظماً وموازياً لمسار الشحنة، فأن حركة الشحنة باتجاه معاكس لشدة المجال تجعل الزاوية θ بين E وdr تساوي 180^0 وتصبح المعادلة (9-4) كالآتي :

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos 180 dr = E\int_A^B dr = Ed \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}9)$$

إذ أن d تمثل طول المسار بين النقطتين A و B.

يظهر من المعادلة (9-6) انه بالإمكان التعبير عن شـــدة المجـــال الكهربـــائي بالوحدة ($\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$). ويمكن إثبات التطابق بين هذه الوحدة والوحدة التي مرَّ ذكرها في الفصل الثامن وهي ($\frac{\text{نيوتن}}{\text{كولوم}}$) كالآتي :

$$\frac{\text{فولت}}{\text{متر}} = \frac{\text{جول}}{\text{كولوم. متر}} = \frac{\text{نيوتن . متر}}{\text{كولوم. متر}} = \frac{\text{نيوتن}}{\text{كولوم}}$$

مثال (9-2)

إذا علم أن فرق الجهد بين لوحين متوازيين متعاكسي الشحنة المسافة بينهما $1cm$ هو $100V$. احسب : 1- مقدار شدة المجال الكهربائي بينهما ، 2- مقدار التعجيل الذي يتحرك به ايون الهيدروجين كتلتـــه $3.32\times10^{-27}kg$ وشـــحنته $1.6\times10^{-19}C$ إذا وضع في هذا المجال ، 3- سرعته بعد أن يقطع مسافة قـــدرها $0.5cm$ ، 4- طاقته الحركية بعد أن يقطع هذه المسافة.

الحل :

-1

$$\Delta V = Ed$$

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4 NC^{-1}$$

2- لما كانت شحنة ايون الهيدروجين موجبة، فان تعجيله يكون باتجـــاه المجـــال الكهربائي وعلى خط مستقيم، أما مقداره فيمكن إيجاده من المعادلة :

$$F = ma \Rightarrow qE = ma$$

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1.6\times10^{-19}\times10^{4}}{3.32\times10^{-27}} = 4.819\times10^{11}\, m/\sec^{2}$$

3- سرعة ايون الهيدروجين بعد أن يقطع مسافة قدرها $0.5cm$ هي :

$$\vartheta = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\times4.819\times10^{11}\times0.5\times10^{-2}} = 6.94\times10^{4}\, m/\sec$$

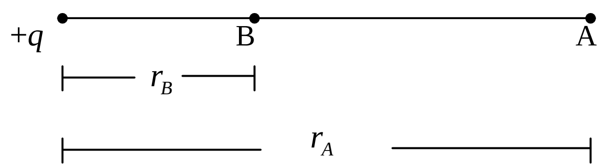
4- طاقة ايون الهيدروجين بعد أن يقطع المسافة نفسها هي:

$$K = \frac{1}{2}m\vartheta^{2} = \frac{1}{2}\times3.32\times10^{-27}\times(6.94\times10^{4})^{2}$$

$$= 7.99515\times10^{-18}\, J$$

(3-9)الجهد الكهربائي والطاقة الكامنة لشحنة نقطية
Electrical Potential and Potential Energy for Charge Point

لإيجاد مقدار الجهد الكهربائي في نقطة مثل B واقعة بالقرب من شحنة نقطية، نجد أولاً علاقة لفرق الجهد بين النقطتين A و B الواقعتين في المجال الكهربائي الخـــاص بالشحنة الموجبة q على المسافتين r_A و r_B على التوالي كما مبين في الشكل (3-9).



الشكل (3-9): الجهد الكهربائي لشحنة نقطية.

تستعمل المعادلة (4-9) في حساب فرق الجهد بين النقطتين A و B :

$$V_B - V_A = -\int_{A}^{B} E\cos\theta dr$$

ولدينا

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^{2}}$$

وهي شدة المجال الكهربائي في نقطة في الفراغ الذي يحيط بالشحنة q ويبعـــد عنـــــها مسافة r

$$\therefore V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} q\cos\theta \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} q\cos 0 \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad \text{..........................(7-9)}$$

والآن إذا جعل موضع النقطة A (أو B) في اللانهاية أو بعيدة جداً عن الشحنة q، فان $r_A = \infty$ (أو $r_B = \infty$) ويصبح $V_A = 0$ (أو $V_B = 0$) وبتعـــويض هـــاتين القيمتين لـــ r_A و r_B في المعادلة (7-9) نحصل على قيمة الجهد المطلق عند النقطـــة B (أو A). ولأية نقطة على مسافة r في مجال الشحنة q نحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \text{..............................(8-9)}$$

ولإيجاد الجهد لمجموعة من الشحنات النقطية q_1 و q_2 و.........q_n، التي تبعد بالمسافات r_1 و r_2 و................r_n عن نقطة ما مثل p واقعة في المجـــال الكهربـــائي الخاص بها، تُحسب V_1 و V_2 و..................V_n لكل شحنة على حدة عند النقطة p كما لو كانت الشحنات الأخرى غير موجودة، أي :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \;,\; V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

وبذلك يكون الجهد الكلي هو حاصل الجمع الجبري للإسهامات المنفردة. ومرة أخرى هذا هو مبدأ التراكب ولكنه هنا باستعمال كميات قياسية وعلى الشكل الآتي:

$$V = V_1 + V_2 + \text{.....................} + V_n = \sum_n V_n$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q}{r_n} \qquad \text{..............................(9-9)}$$

حيث r_n هي المسافات التي تبعدها الشحنات q_n عن النقطة قيد الاعتبار.

وفي حالة كون الشحنة موزعة توزيعاً متصلاً، كأن تكون الشحنة موزعة على سطح جسم موصل أو موزعة ضمن حجم معين بشكل متصل، فيمكن إيجـــاد الجهـــد الناشئ عنها بتقسيم الشحنة إلى عدد كبير من العناصر التفاضلية dq ثم يحسب الجهـــد dV الناشئ عن كل عنصر مقداره dq عند نقطة تبعد r عن العنصر التفاضلي، أي:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad \text{..........................(10-9)}$$

ولإيجاد الجهد الكلي الناشئ عن الشحنة بأكملها تجرى عملية التكامل لجميع الجهـــود الناشئة عن الأجزاء التفاضلية ، أي :

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad \text{....................(11-9)}$$

وباستعمال المعادلتين (9–5) و (9–7) يمكن حساب الطاقة الكامنـــة الكهربائيـــة لأي شحنة مثل Q واقعة في مجال الشحنة النقطية q وبذلك نحصل على:

$$\Delta(p.E) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

أو

$$(p.E)_B - (p.E)_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

وبنفس الأسلوب الذي اتبع في حساب الجهد تكون الطاقة الكامنة للشحنة Q هي:

$$p.E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} \qquad \text{....................(12-9)}$$

مثال (9–3)

احسب الجهد المطلق في الهواء على بعد $3cm$ من شحنة نقطية $500\mu c$

الحل :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V = 9\times10^9\frac{500\times10^{-6}}{0.03} = 150000\ V = 150KV$$

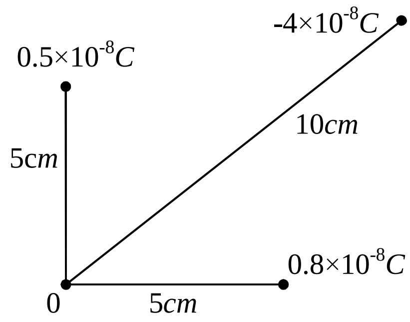
مثال (4-9)

ثلاث شحنات نقطية $0.5\times10^{-8}C+$ و $-4\times10^{-8}C$ و $0.8\times10^{-8}C$ جميعها واقعة في المستوي xy ومثبتة في المواقع المؤشرة في الشكل (4-9). جدْ مقدار

1- الجهد الكهربائي عند نقطة الأصل 0 الناشئ عن الشحنات.

2- الشغل اللازم إنجازه لإحضار إلكترون إلى النقطة 0 من مسافة بعيدة جداً.

الحل :



الشكل (4-9).

1- الإسهامات المختلفة في الجهد عند النقطة 0 هي :

$$V_1=9\times10^9\frac{0.5\times10^{-8}}{0.05}=900\ V$$

$$V_2=9\times10^9\frac{-4\times10^{-8}}{0.1}=-3600\ V$$

$$V_3=9\times10^9\frac{0.8\times10^{-8}}{0.05}=1440\ V$$

والجهد الكلي عند 0 هو:

$$V=V_1+V_2+V_3$$

$$V=900+(-3600)+1440=-1260\ V$$

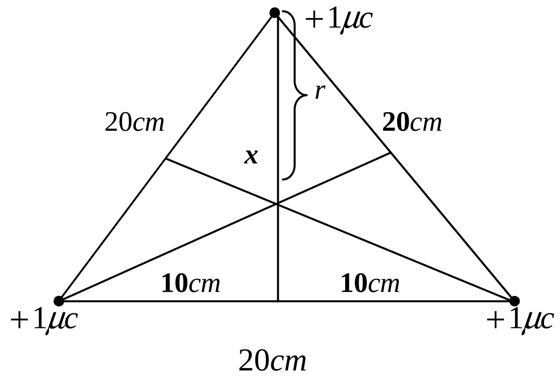
2- الشغل المطلوب إنجازه لإحضار إلكترون بعيد جداً هو :

$$W=qV=(-1.6\times10^{-19})(-1260)=2\times10^{-16}\ J$$

مثال (9-5)

يبين الشكل (9-5) ثلاث شحنات نقطية موضوعة عند أركان مثلث طــول ضلعه $20cm$. احسب الجهد عند مركز المثلث : 1- إذا كانت كل من الشحنات الثلاث $+1\mu C$، 2- إذا كانت شحنتان من المثلث $+1\mu C$ والــشحنة الثالثــة $-1\mu C$.

الحل:



الشكل (9-5).

1- نجد بعُدْ مركز المثلث عن رؤوسه الثلاثة (r) حيث:

$$r = \frac{2}{3}x$$

من نظرية فيثاغورس نجد :

$$x = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} = 22.36cm$$

$$\therefore r = \frac{2}{3} \times 22.36 = 14.9cm$$

ثم تطبق المعادلة (9-9) للحصول على الجهد :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_n}{r} = \frac{1}{4\pi}$$

$$= 9\times10^9 \frac{3\times1\times10^{-6}}{14.9\times10^{-2}} = 1.8\times10^5\, V$$

2- في حالة الشحنة الثالثة $-1\mu C$ نحصل على جهد:

$$V = 9\times10^9 \frac{(1+1-1)}{14.9\times10^{-2}} = 0.6\times10^5\, V$$

مثال (6-9)

إلكترون يتحرك بسرعة $6\times10^5 m/\sec$ عند مروره بنقطة A في طريقه إلى نقطة B. فإذا كانت سرعته عند B هي $12\times10^5 m/\sec$ فاحسب فرق الجهد بين A و B وبين أيهما تكون عند جهد أعلى.

الحل :

الشغل المبذول في نقل الإلكترون من نقطة A إلى نقطة B وهو يمثل الطاقة الكامنة المفقودة $(P.E)$ وتساوي $q(V_B - V_A)$، ومن المعلوم أن الفقد في $(P.E)$ يظهر كطاقة حركية للإلكترون ، أي :

$$q(V_B - V_A) = \frac{1}{2} m \vartheta_2^2 - \frac{1}{2} m \vartheta_1^2$$

$$V_B - V_A = \frac{m}{2q}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)$$

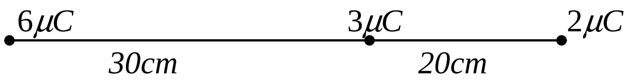
$$V_B - V_A = \frac{9.1\times10^{-31}}{2\times1.6\times10^{-19}}\left((12\times10^5)^2 - (6\times10^5)^2\right)$$

$$V_B - V_A = 3.07\ V$$

من ذلك نستنتج أن نقطة B تكون عند جهد أعلى.

مثال (7-9)

احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لثلاث شحنات نقطية موضوعة على محـــور السينات بالترتيب الموضح في الشكل (6-9).



الشكل (6-9)

الحل :

لنقلِ أي شحنة من المالانهاية إلى نقطة يكون عندها الجهد V فان شغلاً يجب أن يبذل على الشحنة. هذا الشغل يظهر على هيئة طاقة كامنة كهربائية $(P.E)$ مختزنـــة في الشحنة. أن نقل الشحنة $2\mu C$ من المالانهاية لا يتطلب شغلاً لعدم وجـــود شـــحنات

أخرى قريبة، في حين يكون الشغل اللازم لنقل الشحنة $3\mu C$ (من المالانهاية) نتيجة التنافر مع الشحنة $+2\mu C$ هو:

$$W_{3\mu c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

حيث الجهد هنا يكون نتيجة الشحنة $+2\mu C$

$$W_{3\mu c} = 9\times10^{9}\,\frac{3\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{0.2} = 0.27J$$

لنقلْ الشحنة $6\mu C$ إلى الموضع المطلوب إحضارها عنده حيث الجهد يكون نتيجة الشحنتين $+2\mu C$ و $3\mu C$، وعليه فان الشغل اللازم لإنجاز ذلك $6\mu C$ هو:

$$W_{6\mu c} = 9\times10^{9}\times6\times10^{-6}\left[\frac{2\times10^{-6}}{0.5}+\frac{3\times10^{-6}}{0.3}\right]$$

$$= 0.756J$$

بجمع مقادير الشغل اللازم لنقل الشحنات الكلية نحصل على الطاقة الكامنة الكهربائية المختزنة في النظام وهي: $p.E = 0 + 0.27 + 0.765 = 1J$

وعلى الطالب أن يثبت بأن الترتيب الذي تم به نقل الشحنات من المالانهاية لا يؤثر على هذه النتيجة؟

(4–9) الإلكترون فولت Electron Volt

اشرنا في البند الأول من هذا الفصل إلى أن وحدة الطاقة أو الشغل في النظام الدولي للوحدات SI هي الجول. غير أن هذه الوحدة تعتبر كبيرة جداً عند التعامل مع الجسيمات الأولية (الكترونات، بروتونات أو شحنات صغيرة من الايونات) التي نلتقي بها في حقل الفيزياء النووية. لذلك صار من المناسب التعامل مع وحدة أخرى للطاقة اصغر وأكثر ملائمة من الجول وهي الإلكترون فولت واختصارها eV وتعّرف على إنها مقدار الطاقة التي يكتسبها جسم يحمل شحنة إلكترون واحد عندما يتسارع خلال فرق جهد مقداره فولت واحد. إذن عندما يتحرك إلكترون أو بروتون بحرية خلال فرق جهد مقداره 1فولت فان طاقته أو الشغل اللازم لانجاز الحركة وفقاً للمعادلة (9–2) هي:

$$1eV = (1e)(1.602\times10^{-19}\frac{J}{e}) = 1.602\times10^{-19}J$$

مثال (9–8)

إذا علم إن فرق الجهد بين نقطتين في مجال كهربائي يساوي $1000V$ فما مقدار الشغل المطلوب لتحريك جسيمٍ ذي شحنة مقدارها $2e$ من أحدى النقطتين إلى الأخرى بوحدات.

1- إلكترون فولت، 2- الجول.

الحل :

−1

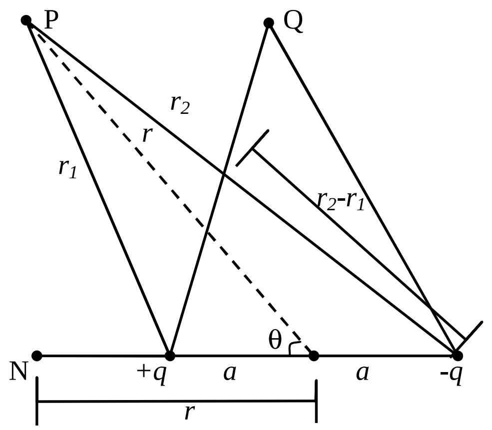
$$W = q(V_2 - V_1)$$
$$W = qV_{21} = (2e)\times(100\,V)$$
$$W = 200\,\text{eV}$$

−2

$$W = 2\times 1.6\times 10^{-19}\times 100\,V$$
$$= 3.2\times 10^{-17}\,J$$

(9–5) جهد ثنائي القطب الكهربائي Potential Electric Dipole

يمثل الشكل (9–7) ثنائي قطب كهربائي متكون من شحنة موجبة $+q$ وأخرى سالبة $-q$ تفصلهما مسافة $2a$ والمطلوب إيجاد قيمة الجهد الكهربائي الناشئ عن الشحنتين $+q$ و $-q$ عند النقاط N و P و Q.



الشكل (9–7) : ثنائي القطبي الكهربائي.

عند النقطة N الواقعة على امتداد محور ثنائي القطب نحو اليسار وتبعد مسافة r عن مركزه نجد إن الجهد الكهربائي للشحنة $+q$و $-q$ *على ألتتالي* يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r-a}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r+a}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما، أي :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-a} - \frac{q}{r+a}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(r+a)-(r-a)}{r^2-a^2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2-a^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13\text{-}9)$$

وفي الحالات التي تكون فيها النقطة N على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب أي ($r>>2a$) يمكن إهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 عندئذ تأخـــذ المعادلـــة (9–13) الشكل الآتي :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14\text{-}9)$$

إذ أن $p = 2qa$ ترمز لعزم ثنائي القطب الكهربائي.

أما الجهد الكهربائي عند النقطة P التي حدد موقعها بالإحداثيات القطبية r وθ (انظر الشكل 9–7) فيمكن إيجاده بنفس الأسلوب أي أن الجهد عند النقطة p للشحنة $+q$ يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

أما الجهد عند نفس النقطة للشحنة $-q$ يكون:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_2}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما ،أي:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15\text{-}9)$$

وللحالات التي يكون فيها بعد النقطة p كبيراً بالنسبة لــ$2a$ أي ($r>>2a$) يكون:

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

$$r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة (9–15) نحصل على:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16\text{-}9)$$

نجد من المعادلة (9–16) تحقيقٌ لنتيجة الجهد عند النقطة N في الحالة التي تكون على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب، والتي عندها من المفترض أن تكون قيمـــة θ تساوي صفراً، أي cosθ=1 فعند تعويض هذه النتيجة في المعادلة (9–16) نحصل على نفس الصيغة التي حصلنا عليها في المعادلة (9–14). كما نجد من المعادلـــة (9–16) أن الجهد يساوي صفراً عند جميع النقاط الواقعة على الخط العمودي المقام مـــن منتـــصف المسافة بين شحنتي ثنائي القطب أي عندما تكون الزاوية θ تساوي 90.

(9–6) حساب شدة المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي
Calculation of Electric Field from Electric Potential

من المعلوم أن شدة المجال الكهربائي كمية اتجاهية وان حساب قيمتها بطريقـــة التكامل مباشرةً باستعمال المعادلة (8–11) كما مرَّ ذكرها في البند (8–5) من الفصل الثامن أمر غير سهل. وطالما أن الجهد الكهربائي كمية غير اتجاهية ، لذا فمن الضروري أن يكون حساب شدة المجال الكهربائي عن طريق حساب الجهد يعد طريقة أسهل مـــن حسابه بطريقة التكامل بصورة مباشرة. لاحظنا في البند (9–2) أن هناك علاقة بين شدة المجال الكهربائي E وفرق الجهد ΔV ممثلة في المعادلة (9–4) وهي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta\, dr$$

والآن سنرى كيف يمكن حساب قيمة E إذا كان الجهد الكهربائي معروفاً في منطقة ما. من المعادلة أعلاه يمكن التعبير عن فرق الجهد dV بين نقطتين المسافة بينـــهما متناهية في الصغر dr كالآتي :

$$dV = -E\cos\theta dr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17\text{-}9)$$

حيث $E\cos\theta$ تمثل مركبة شدة المجال الكهربائي باتجـــاه dr، وان θ هـــي الزاويـــة المحصورة بين اتجاه $\vec{E}$ وعنصر المسافة dr. في الحالة التي تكون فيها الكميـــة $E\cos\theta$ باتجاه dr فان $\theta=0$ عندئذ يمكن كتابة المعادلة (9–17) كالآتي :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18\text{-}9)$$

وهذه هي قيمة مركبة شدة المجال الكهربائي باتجاه المسافة dr ، أما الإشارة السالبة فهي تدل على إن اتجاه E هي باتجاه تناقص الجهد.

أما إذا كان V متغيراً في أكثر من اتجاه مثل x وy وz فيمكن عندئذ إعـــادة كتابة المعادلة (9–18) في هذه الاتجاهات كالآتي :

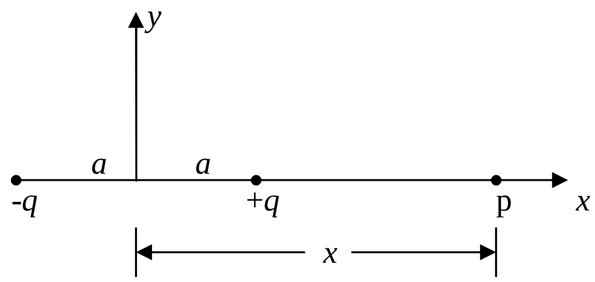
$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{-}9)$$

من المناقشة التي بنيت على أساس المعادلة (9–4) نجد أن الجهد الكهربائي يبقـــى ثابتـــاً لجميع نقاط المسار إذا كان عمودياً على المجال الكهربائي وسنأتي إليه في البند القادم.

مثال (9–9)

ثنائي قطب كهربائي يتكون من شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة تفصلهما مسافة $2a$ (شكل 9–8). احسب:1- الجهد الكهربائي V عند النقطة p، 2- الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x عند نقطة بعيدة عن ثنائي القطب، 3- الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x إذا كانت p واقعة بين الشحنتين.

الحل:



الشكل (8-9).

1- الجهد الكهربائي عند النقطة p يكون:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n\frac{q_n}{r_n}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{x-a}+\frac{-q}{x+a}\right)$$

$$V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2-a^2}$$

2- إذا كانت النقطة p بعيدة عن ثنائي القطب ($x>>a$) عندئذ تهمل a^2:

$$\therefore V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}$$

وباستعمال المعادلة (9-18) ونتيجة الجهد أعلاه يمكن حساب E_x كما يأتي :

$$E_x=-\frac{dV}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}\right)=-\left(\frac{-2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}\right)$$

$$\therefore E_x=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}$$

3- في الحالة التي تكون بها p واقعة بين الشحنتين فان V و E_x تحسبان كما يأتي :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n\frac{q_n}{r_n}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a-x}-\frac{q}{a+x}\right)$$

$$V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2-x^2}$$

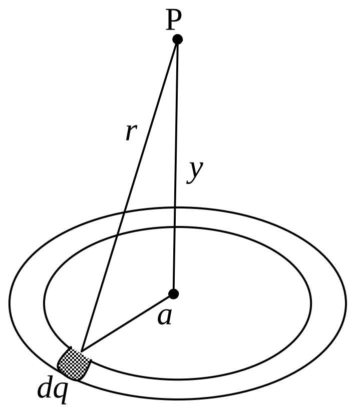
$$E_x=-\frac{dV}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2-x^2}\right)$$

$$\therefore E_x=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-x^2-a^2}{(a^2-x^2)^2}$$

مثال (9-10)

شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها a كما مبين في الشكل (9-9). احسب :1- الجهد الناشئ عن الحلقة عند نقطة مثل p واقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها،2-شدة المجال الكهربائي عند النقطة p .

الحل:



الشكل (9-9).

1- نقسّم الحلقة إلى عناصر تفاضلية تبعد جميعها بمسافات متساوية عن النقطة p المراد إيجاد الجهد عندها. ثم نأخذ احد هذه العناصر الذي تبلغ قيمة شحنته dq ونعتبرها بمثابة شحنة نقطية تبعد مسافة r عن النقطة p.

بتطبيق المعادلة (9-10) نستطيع أن نجد مقدار الجهد الناشئ عن هذا العنصر وكما يأتي :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

بإجراء التكامل لكل من طرفي المعادلة نحصل على قيمة الجهد عند النقطة p:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2}}\int dq$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

2- واضح من تناظر الشكل أن المجال الكهربائي يكون باتجاه محور الحلقة y لـــذا بالإمكان الحصول على E عند p بالاستفادة من المعادلة (9–18) ،أي أن:

$$E = E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

يبدو أن هذه النتيجة تتفق تماماً مع النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بصورة مباشرة في البند (8–5) من الفصل الثامن المعادلة (8–18).

(9–7) جهد جسم كروي موصل مشحون
Potential of Spherical Body Charged Conductor

نعود الآن إلى علاقة الجهد الكهربائي عند أي نقطة على مسافة r في مجال شحنة نقطية q والمتمثلة بالمعادلة (9–8) وهي :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

ولابد أن نتذكر بان هذه المعادلة يصح تطبيقها في أية نقطة واقعة خارج جسم كـــروي موصل، إذ يمكن الحصول على هذه النتيجة بإتّباع الطريقة نفسها التي تم فيها اشـــتقاق المعادلة أعلاه ويترك للطالب برهان ذلك.

ولإيجاد قيمة الجهد الكهربائي عند جميع النقاط الواقعة داخل موصل كـــروي نصف قطره R ، والبرهنة على أنها متساوية في الجهد وتساوي قيمة الجهد على سطحه نفترض أن النقطة B تمثل أي نقطة على سطح كرة موصلة بينما النقطة A في داخـــل الكرة.من الأدبيات المعروفة إن شدة المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي صفراً، لـــذا طبقاً للمعادلة (9–4) نجد أن فرق الجهد بين النقطتين A و B يصبح:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr = 0$$

$$\therefore V_B = V_A$$

هذا يعني إن الجهد عند أي نقطة على سطح كرة موصلة مثل B يساوي الجهد عند النقطة A في داخل الكرة. وبكلام آخر فان قيمة الجهد عند جميع النقاط الواقعة داخل كرة موصلة تكون متساوية وتساوي قيمة الجهد على سطحه*.

لنعود الآن إلى الشكل (9–3) ونتخيل كرة موصلة مشحونة بـ $+q$ بدلاً من الشحنة النقطية $+q$ وان النقطة B تقع على سطح الكرة التي تبعد r_B عن مركزها. فباستخدام المعادلة (9–7) نستطيع أن نجد فرق الجهد بين النقطتين A و B :

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

وبنفس الطريقة نحصل على علاقة خاصة للجهد الكهربائي عند النقطة B الواقعة على سطح الكرة الموصلة بعد فرض إن الجهد عند النقطة A يساوي صفراً في المالانهاية:

$$V_B - 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$\therefore V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$$

وبالتعويض عن r_B بـ R نحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad \text{.....................(20-9)}$$

إن الجهد عند أي نقطة واقعة خارج جسم كروي موصل وعلى بعد r من مركزه هو:

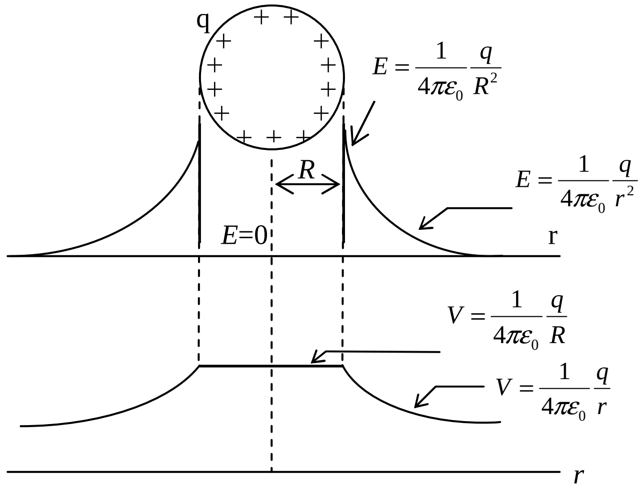
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

ولقد ترك للطالب برهان ذلك.

يبيّن الشكل (9–10) توزيع كل من مقدار شدة المجال الكهربائي والجهد داخل كرة موصلة وخارجها نصف قطرها R ومشحونة بشحنة موجبة مقدارها $+q$.

---

* لو لم تكن النقاط الواقعة داخل الكرة الموصلة متساوية الجهد، لانتقلت الشحنات من المواقع الأقل جهداً إلى المواقع الأعلى جهداً في الموصل. ولكن هذا خلاف الواقع كون الشحنات مستقرة على سطح الموصل الخارجي كما بينا سابقاً.



الشكل (9-10): المجال الكهربائي والجهد لكرة معدنية موصلة.

إن مقدار شدة المجال الكهربائي على سطح الكرة الموصلة يساوي:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \qquad \text{(21-9)}$$

$$\therefore V=RE \qquad \text{(22-9)}$$

هناك على الأقل صياغتان تقرآن في هذه المعادلة: الأولى التناغم العكسي بين مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل ونصف قطر تكور ذلك الجزء من سطح الموصل المشحون. إذ تكون شدة المجال الكهربائي خارج الرأس المدبب عالية جداً مما يستدعي ظاهرة تأين الهواء وحدوث التفريغ الكهربائي عند الرؤوس المدببة للموصل المشحون. وهذا هو مبدأ عمل مانعة الصواعق. أما الثانية التناغم الطردي بين مقدار الجهد الكهربائي كدالة لنصف قطر الموصل المشحون. لهذا السبب تجعل الكرة كبيرة في مولد فان دي كراف وذلك لزيادة الجهد الذي يمكن الحصول عليه من هذا المولد.

الآن لنفترض أن لدينا جسماً موصلاً مشحوناً ذا رأس مدبب وان يكون هذا الجسم مكافئٌ لكرة موصلة صغيرة هي بمثابة الرأس المدبب من الجسم وتوصل بواسطة سلك دقيق وطويل مع كرة أخرى كبيرة هي بمثابة المناطق الأخرى من الجسم الموصل. فإذا كان نصف قطر الكرة الصغيرة r وشحنتها q، ونصف قطر الكرة الكبيرة R وشحنتها Q (انظر الشكل 9-11) وان جهديهما متساويان بسبب أنهما متصلان مع بعضهما بسلك موصل. عندئذ يكون الجهد:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23\text{-}9)$$

أن كثافة الشحنة السطحية σ تمثل مقدار الشحنة لوحدة المساحة وعليه فان:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{للكرة الصغيرة} \\ \sigma_R &= \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{للكرة الكبيرة} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(24\text{-}9)$$

ومن العلاقتين (9–23) و (9–24) يكون لدينا:

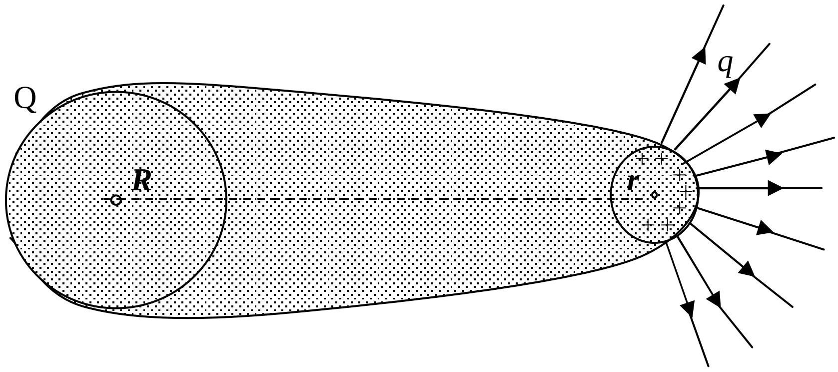
$$\sigma_r r=\sigma_R R$$

$$\therefore \frac{\sigma_r}{\sigma_R}=\frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25\text{-}9)$$

الآن لو نظرنا إلى المعادلة $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ يمكننا كتابة المعادلة (9–25) بشكل آخر، أي:

$$\frac{E_r}{E_R}=\frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26\text{-}9)$$

وهذا يدل على إن مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل يتناسب عكسياً مع نصف قطر التكور. ومن تطبيقاتها هو أن هذا المجال يؤثر على الايونات القليلة الموجودة في الهواء ويجعلها تنجذب (أو تتنافر) نحو الرأس المدبب بتعجيل كبير. ونتيجة لاصطدام الايونات بجزيئات الهواء ينتج المزيد من الايونات، وبهذا يصبح الهواء أكثر توصيلاً للكهربائية وتتسرب شحنة الموصل عن طريق الرأس المدبب بمعدل عال.



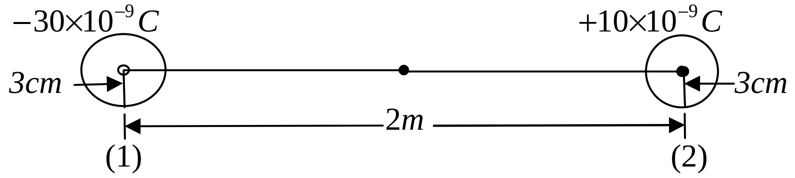
الشكل (9–11): جسم موصل مشحون تخيلنا فيه الكرة الصغيرة بمثابة الرأس المدبب والكرة الكبيرة المناطق الأخرى من جسم الموصل متصلتين مع بعضهما بسلك موصل دقيق.

مثال (9–11)

يبين الشكل (9–12) كرتين موصلتين متماثلتين نصف قطر كل منهما $3cm$ تحملان شحنتين مقدارهما $-30\times10^{-9}C$ و $+10\times10^{-9}C$. المسافة بين مركزيهما $2m$. احسب: 1– الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين ، 2– جهد كل من الكرتين.

الحل:

إن جهد كل كرة ينشأ عن شحنة الكرة ذاتها وعن شحنة الكرة الأخرى التي تبعد عنها بمسافة مقدارها $2m$.



الشكل (9–12).

-1 $V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{1}+\frac{10^{-8}}{2}\right)$$

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-60\times10^{-9}+10^{-8}}{2}\right)=\frac{-540+90}{2}=-225\,V$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{1}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{2\times10^{-8}-30\times10^{-9}}{2}\right)=\frac{180-270}{2}=-45\,V$$

عندئذ يصبح الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين (اعتدنا تسميته فرق الجهد):

$$V_1-V_2=-225-(-45)=-180\ V$$

2– جهد الكرة (1) يساوي الجهد الناشئ عن شحنة الكرة ذاتها زائداً الجهد الناشئ عن شحنة الكرة (2) عند بعد قدره $2m$ عنها، لذا :

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{3\times10^{-2}}+\frac{10^{-8}}{2}\right)=-8955\ V$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{3\times10^{-2}}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)=+286\,V$$

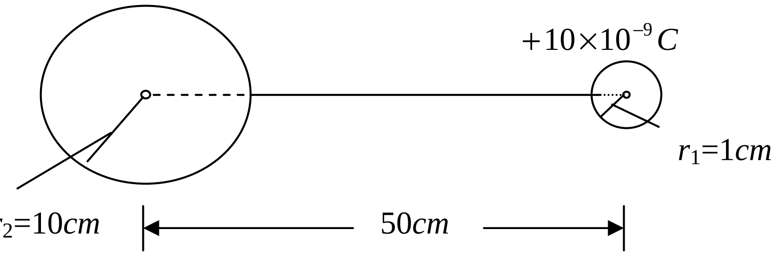
مثال (9–12)

في الشكل (9–13) شحنت الكرة الصغيرة بشحنة $+10\times10^{-9}C$، وبعد ذلك وصِّلت بالكرة الكبيرة بسلك موصل دقيق. فإذا علمت أن المسافة بين مركزي الكرتين $50cm$. احسب: الشحنة التي تحصل عليها كل من الكرتين وجهد كل منهما.

الحل :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$



الشكل (9-13)

حيث q_1 تمثل الشحنة التي استقرت على الكرة الصغيرة و q_2 الشحنة التي استقرت على الكرة الكبيرة بعد أن وصّلتا بالسلك الدقيق. وقد أهملت الشحنة التي استقرت على السلك الموصل لضآلتها، لكن جهد الكرتين يتساوى بعد أن يتصلان، لذا :

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{10^{-2}} = \frac{q_2}{10^{-1}}$$

$$10^2 q_1 = 10 q_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.1 q_2$$

أو

$$q_2 = 10 q_1$$

لكن

$$q_1 + q_2 = 10\times10^{-9}$$

$$q_1 + 10 q_1 = 10\times10^{-9}$$

$$11 q_1 = 10\times10^{-9}$$

$$q_1 = \frac{10}{11} \times 10^{-9} = 91 \times 10^{-11} C \qquad و$$

$$q_2 = 10 \times 91 \times 10^{-11} = 91 \times 10^{-10}$$

نعود للمعادلة (9-20) ونحسب جهد كل من الكرتين :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$\therefore V_1 = V_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{91 \times 10^{-11}}{10^{-2}} = 819\ V$$

(9-8) متساويات الجهد Equipotentials

نعود إلى البند (9-6) ونستحضر المعادلة (9-18)، نلاحظ انه في الحالة التي يكون فيها اتجاه المجال الكهربائي عمودياً على مسار حركة الشحنة تكون قيمة مركبة شدة المجال باتجاه المسار مساوية إلى الصفر، وعليه فان:

$$\frac{dV}{dr} = 0$$

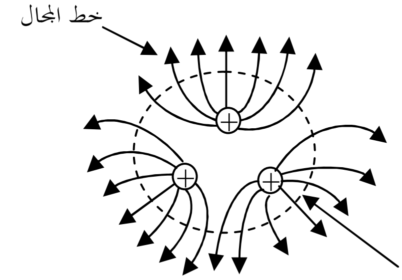
أي أن الجهد الكهربائي يبقى ثابتاً لجمع نقاط المسار. ويطلق على هذا المسار بخط تساوي الجهد، والسطح الذي يكون جميع نقاطه متساوية الجهد بسطح تساوي الجهد,

لنعود إلى البند الأول ونبحث الموضوع بتبسيط أكثر مما في المعادلة (9-1) وهي :

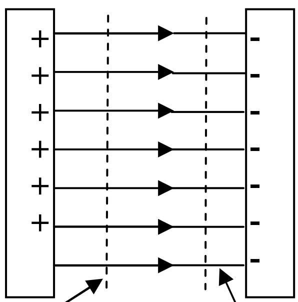
$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

و نتساءل متى يكون جهد النقطة A مساوياً لجهد النقطة B أو أي نقطة على الخط الواصل بين هاتين النقطتين. والجواب هو عندما لا تكون هناك حاجة لبذل أي شغل لتحريك شحنة الاختبار q_0 على طول الخط الواصل بين النقطتين. وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت الحركة باتجاه متعامد مع المجال الكهربائي. نستدل من هذه المناقشة أن سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على المجال، فلو لم تكن كذلك لكان هناك مركبة لشدة المجال موازية للسطح وعندئذ يتوجب إنجاز شغل عند نقل شحنة اختبارية على السطح وهذا خلاف الواقع .

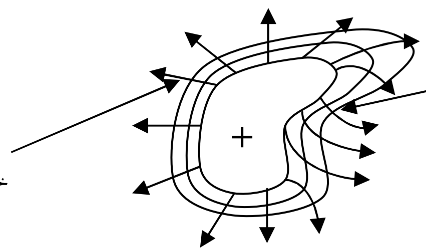
وتبين الأشكال الآتية بعض من سطوح تساوي الجهد.



الشكل(12-9):متساويات الجهد متعامدة مع خطوط المجال لوسط يحيط بثلاث شحنات متماثلة .

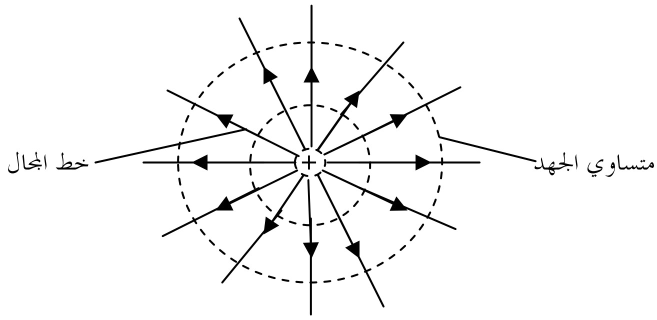


الشكل (13-9): متساويات الجهد متعامدة مع خطوط المجال للوحين متوازيين.



الشكل (14-9): متساويات الجهد متعامدة مع خطوط المجال لوسط يحيط فلزي مشحون .

الآن لو فرضنا أن الجسم الموضح في الشكل (14-9) يرصد من مسافة بعيدة حتى يبدو كنقطة صغيرة. عندئذ تكون خطوط المجال شعاعيه وتكون متساويات الجهد دوائر كما يدل عليه الشكل (15-9).



الشكل (9–15) : خطوط المجال شعاعية ومتساويات الجهد دوائر.

(9–9) علاقة السعة بفرق الجهد والشحنة
The Relation of Capacitance with Potential and Charge

لنفرض موصلاً معزولاً خالياً من الشحنة الكهربائية فان جهده الكهربائي يساوي صفراً. وإذا وضعنا على الموصل شحنة موجبة يصبح هناك قيمة لجهد هذا الموصل. من هذا يتضح أن الشحنة التي يحملها الموصل تتناسب طردياً مع قيمة جهده الكهربائي وبذلك يمكن كتابة المعادلة الآتية:

$$q = const.V$$

حيث أثبتت التجربة أن هناك نسبة ثابتة من الشحنة والجهد لجميع أنواع الموصلات، أي أن لكل موصل نسبته المميزة وقد أطلق عليها اسم السعة الكهربائية ورمزها C ،أي:

$$q = CV$$

أو

$$C = \frac{q}{V} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27\text{-}9)$$

ومن المعادلة (9–27) يمكن تحديد قيمة سعة موصل ما إذا عرفت مقدار الشحنة التي عليه ومقدار الجهد الذي تنشئه هذه الشحنة. في المعادلة نفسها إذا استُعمِلتْ الوحدة العملية لكل من الشحنة (كولوم) والجهد (فولت) فتكون الوحدة العملية للسعة (كولوم لكل فولت) وتساوي فاراد* ورمزها (F) وتعرف كالآتي : **إذا كانت الشحنة التي على**

* نسبة إلى اسم العالم الفيزيائي ميخائيل فاراداي الذي ساهم في تطوير السعة الكهربائية.

موصل مقدارها واحد كولوم وكان جهد الموصل نتيجة لهذه الشحنة واحد فولت فان سعة هذا الموصل تكون واحد فاراد.

$$1\ \text{فاراد} = \frac{1\ \text{كولوم}}{1\ \text{فولت}}$$

والفاراد هي الوحدة العملية الكهروستاتيكية للسعة، ولكونها كمية كبيرة جداً لاستخدامها في الحياة العملية، تستعمل وحدات اصغر منها وأكثر ملائمة هي الميكروفاراد ورمزه μF حيث واحد ميكروفاراد يساوي 10^{-6} فاراد، والبيكوفاراد ورمزه pF ويساوي 10^{-12} من الفاراد. وهناك وحدة النانوفاراد وتساوي 10^{-9} من الفاراد ولكن هذه الوحدة غير مستعملة بكثرة في الحياة العملية.

لقد وجد من التجارب العملية أن سعة أي موصل تعتمد على حجمه وشكله بالإضافة إلى نوع الوسط العازل الذي يحيط به ودرجة قرب الموصل من أجسام موصلة أخرى. ولكرة موصلة معزولة نصف قطرها R تحمل شحنة مقدراها Q تكون :

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28\text{-}9)$$

حيث الجهد V على سطح كرة موصلة يعطى كما في المعادلة (9-20) .أما الطاقة المخزونة في موصل معزول فهي:

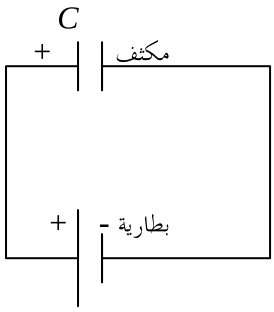
$$U = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29\text{-}9)$$

لقد اشرنا سابقاً إلى منظومة مهمة ذات لوحين معدنيين متوازيين مشحونين بصورة متعاكسة تستخدم كأداة لتخزين الشحنة تسمى مكثفاً (أو متسعة) Capacitor، حيث ترى في الشكل (8-6) متصلة ببطارية وخطوط المجال الكهربائي من حولها تشير إلى أن البطارية قد نقلت الشحنة* إلى لوحي المكثف واكتسب كل منهما جهد طرف البطارية المتصل به. بحيث إذا فصلت البطارية بعد ذلك فان اللوحين يظلان مشحونين إلى

---

* من الممكن إضافة الشحنة إلى المكثف بطريقة ثانية وذلك بتوصيل احد لوحي المكثف بمصدر توليد كهربائي والطرف الأخر يوصل بالأرض مباشرة.

مستوى ذلك الجهد. أي أن المكثف يكون أداة قادرة على خزن الشحنة ويبين الـــشكل (9–17) دائرة مكثف.

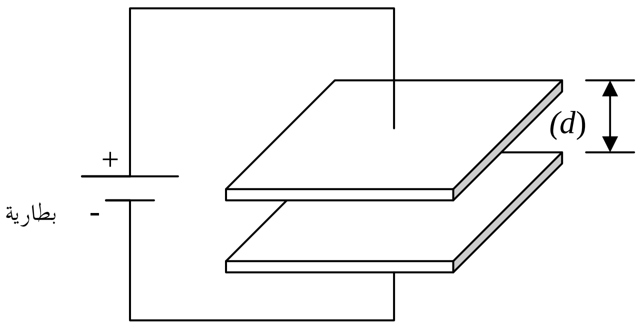


الشكل (9–17) : دائرة المكثف .

وعادة يفصل بين لوحي المكثف وسط عازل يختلف نوعه باختلاف الغـــرض المصمم من اجله المكثف، وعموماً فان المكثفات تكون أما ثابتة السعة أو متغيرة، وتتوقف سعة المكثف على مساحة لوحيه والمسافة بينهما بالإضافة إلى نوع الوسط العازل الـــذي يفصل بينهما.

مثال (9–13)

مكثف ذو صفيحتين موصلتين متوازيتين متصل ببطارية كهربائية كـــما في الشـــــكل (9–18)، أحدى الصفيحتين اكتسبت شحنة مقدارها $q+$ والأخرى $q-$ ومساحة كل منهما A و يفصلهما فراغ. فإذا كانت المسافة بين الصفيحتين (d) صغيرة مقارنة مـــع أبعاد الصفيحتين. جد تعبيراً لسعة المكثف والطاقة المختزنة فيه.



الشكل (9–18).

الحل :

طالما المسافة بين الصفيحتين صغيرة مقارنةً مع بعديهما فيمكن إهمـــال تـــأثير حافات الصفيحتين واعتبار المجال الكهربائي بينهما منتظماً. من قانون كاوس نجد:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

حيث q (شحنة المكثف) تمثل مقدار الشحنة التي تحملها أي صفيحة، ذلك إن المجموع الكلي لشحنة المكثف على الصفيحتين يساوي صفراً. وبتطبيق المعادلة (9–6) نجد:

$$V = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

وبالتعويض عن V في المعادلة (9–27) نجد سعة المكثف ذات الصفيحتين المتوازيتين:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \text{……………………..….(30-9)}$$

من هذه المعادلة نرى أن السعة مقدار ثابت لمكثف معين لا يعتمد على شحنة المكثف ولا على فرق الجهد بين صفيحتيه بل تتناسب طردياً مع مساحة الصفيحتين وسماحية الوسط الفاصل بينهما وعكسياً مع المسافة بين الصفيحتين. أما الطاقة المخزونة في المكثف فهي :

$$U = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \qquad \text{…………………..(31-9)}$$

وتتحرر هذه الطاقة عند تفريغ المكثف، وإذا فرغ المكثف خلال سلك معدني ســـتتحول الطاقة إلى حرارة في السلك.

مثال (9–14)

مكثف سعته $2\mu F$ شحن إلى فرق جهد $100V$. فإذا كانت مقدار شـــحنته $200\mu c$ ما مقدار الطاقة المخزونة؟

الحل :

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}200\times10^{-6}100 = 0.01J$$

or

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{(200\times10^{-6})^2}{2\times2\times10^{-6}} = 0.01J$$

(9–10) مولد فان دي كراف Van de Graff Generator

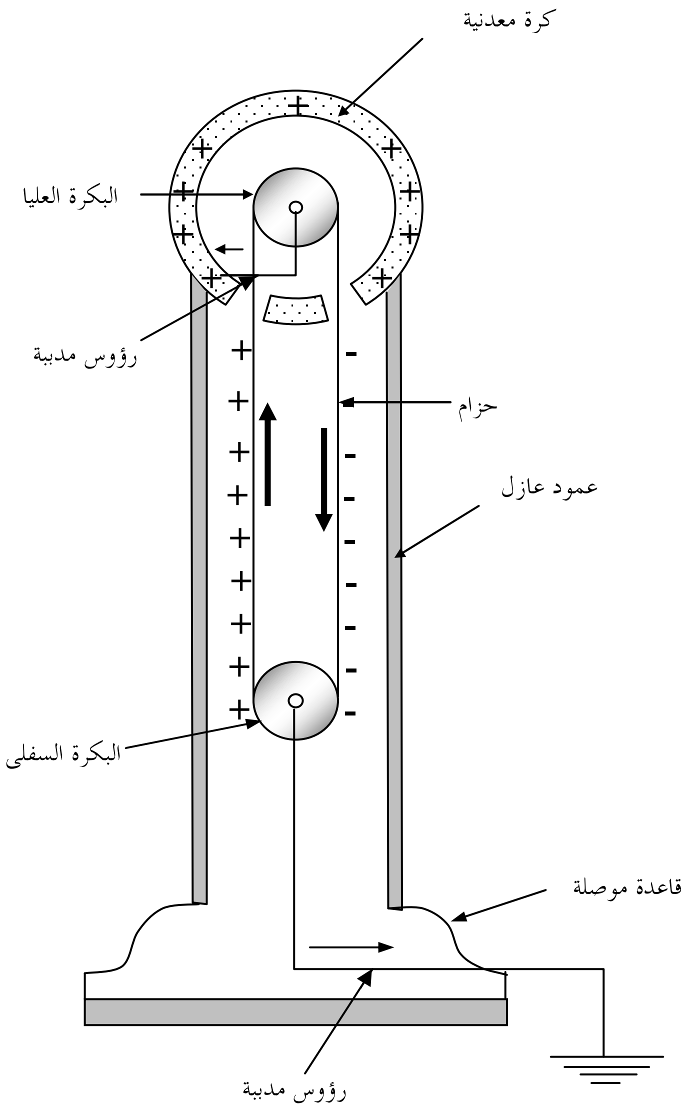
التمثيل البياني لمولد فان دي كراف موضح في الشكل (9–19) صممه العـــالم روبرت فان دي كراف Robert J. Van de Graff (1901–1967) عام 1929. وهو من التطبيقات المهمة لظاهرة توزيع الشحنة على الـــسطح الخـــارجي للموصـــل.

يستعمل هذا الجهاز في الحصول على حزمة من الالكترونات أو البروتونـــات ذات طاقة عالية جداً قد تصل إلى $10MeV$، يستفاد منها بشكل واســـع في تجـــارب الفيزياء الذرية والنووية الحديثة حيث يستغل مقدار الجهد العالي لتعجيـــل الجـــسيمات المشحونة والايونات في ضرب هدفاً معيناً لتوليد أشعة اكس على سبيل المثال لا الحصر.

إن الفكرة الأساسية التي بني عليها عمل مولد فان دي كراف هي عند وضـــع موصل مشحون في تماس مع السطح الداخلي لكرة مجوفة موصلة فان جميع الشحنة الـــتي يحملها الموصل المشحون تنتقل إلى الكرة المجوفة. إن الشحنة المتجمعة على الكرة المجوفـــة وبالتالي الجهد الكهربائي المتكون بسببها يمكن أن تتزايد بدون حدود بتكرار العملية.

في مولد فان دي كراف يستعمل حزام دوار لانتقال الشحنة إلى الكرة المعدنية المجوفة. وهو حزام مصنوع من مادة عازلة يمر فوق بكرتين عازلتين. تطلى البكرة السفلى بطلاء من مادة معينة بحيث أن الحزام المتحرك نحو الأعلى عندما يلامس البكرة يكتسب شحنة موجبة، تنتقل هذه الشحنة عبر رؤوس مدببة إلى الكرة المجوفة. أما البكرة العلوية فأنها تطلى بطلاء من مادة أخرى بحيث أن الحزام عند تركه لها نحو الأســـفل يكتـــسب شحنة سالبة، تنتقل بواسطة الجهة اليمنى من الحزام عبر رؤوس مدببة سفلية إلى قاعـــدة موصلة يرتكز عليها عمود عازل يستعمل لحمل الكرة المجوفة، ثم تتسرب الـــشحنة إلى الأرض. عملياً من الممكن زيادة جهد الكرة الموصلة إلى القيمة التي عندها يحصل التفريغ الكهربائي خلال الهواء، والسبب هو أن جزيئات الهواء الملامسة للكرة المجوفة والمتـــأثرة بمجال شحنتها الموجبة سوف تتأين وتفقد خاصية العزل الكهربائي بمجرد تجاوز شـــدة المجال الكهربائي القيمة $3\times10^6 V/m$. وهذا يعني أن أقصى جهد يمكن الحـــصول عليـــه لكرة نصف قطرها $1m$ هو $3\times10^6 V$، ولكرة نصف قطرها $2m$ هـــو $6\times10^6 V$، أي كلما كانت الكرة المعدنية كبيرة مولد أمكن الحصول على جهد كهربائي اكبر.

مما تقدم يتضح انه لولا وجود صعوبات في عزل الكرة المعدنية كهربائياً لأمكن زيادة الشحنة عليها وبالتالي زيادة جهده الكهربائي إلى أي مقدار نشاء. وبهذا فان أعلى جهد يحصل عليه يتحدد بالقيمة التي عندها يحدث اتزان بين معدل تسرب الشحنات من الكرة خلال العمود العازل و الهواء المحيط بها وبين معدل الشحنات التي تكتسبها الكرة.



الشكل (9-19) : مخطط لنموذج فان دي كراف.

Exercises التمارين

(1-9) : إذا كان فرق الجهد بين نقطتين في مجال كهربائي يساوي $6V$ فما مقـــدار الشغل الواجب بذله لنقل شحنة مقدارها $9C$ من أحدى النقطتين إلى الأخرى؟

(2-9) : إذا علم أن فرق الجهد بين صفيحتين متوازيتين متعاكستين في الشحنة $600V$ والمسافة بينهما $4cm$. احسب كلاً من :1- شدة المجال الكهربائي بينـــهما. 2- القوة على شحنة مقدارها $2\mu c$ عند وضعها في أي مكان بين الصفيحتين.

(3-9) : لوح مستوٍ يحمل كثافة شحنة سطحية مقدارها $-4\mu c/m^2$، فلو أننا حددنا الجهد الكهربائي عند اللوح بالمقدار $V=0$. فكم يكون الجهد على بعد مقداره $2cm$.

(4-9) : إذا كان فرق الجهد بين لوحين معدنيين متعاكسين في الشحنة هو $20V$، فما مقدار الشغل الواجب بذله لنقل شحنة مقدارها $8C$ من اللـــوح الـــسالب إلى اللوح الموجب للبطارية. وكم تكون لنقلها من اللوح الموجب إلى اللوح السالب أيضاً ؟

(5-9) : إلكترون يبدأ من السكون ويسقط خلال ارتفاع جهد $80V$ فمـــا مقـــدار سرعته النهائية.

(6-9) : شحنتان نقطيتان قدرهما $+2\mu C$ و$-3\mu C$ تفصلهما مسافة قـــدرها متـــراً واحداً في الهواء. حدد موقع النقطة (أو النقاط) الواقعة على امتداد الخط المـــار خلالهما التي عندها يكون الجهد صفراً.

(7-9) : كرة صغيرة نصف قطرها r تحمل شحنة موجبة مقدارها q موضوعة عنـــد مركز كرة موصلة كبيرة نصف قطرها R مشحونة بشحنة موجبة مقدارها Q. احسب فرق الجهد بين الكرتين.

(8-9) : إذا علمت أن الجهد الكهربائي في منطقة معينة يساوي $V = \dfrac{K}{x^2 + y^2 + z^2}$ جِدْ المركبات الثلاثة لشدة المجال الكهربائي بالاتجاهات x, y, z.

(9-9) : شحنت متسعة سعتها $2\mu F$ بشحنة مقدارها $10^{-3}C$. ما مقـــدار الطاقـــة المخزونة.

(10-9) : كرة موصلة معزولة نصف قطرها $8cm$ ، فان كان الجهد على ســـطحها $2000V$ جد الشحنة على الكرة والجهد على مسافة متراً واحداً مـــن مركـــز الكرة.

(11-9) : كم يجب أن تكون مسافة اللوح في مكثف سعته $12\mu c$ إذا كان هنـــاك غشاء من أوكسيد الألمنيوم سمكه $20nm$ يملأ الفجوة بين لوحيه المتوازيين؟ اعتبر $k = 8$ بالنسبة لأوكسيد الألمنيوم.

(12-9) : كرة معدنية نصف قطرها $30cm$ تحمل شحنة منتظمة قدرها $8\times10^{-9}C$ وإذا اعتبرنا هذه الكرة بعيدة عن كل الأجسام الأخرى فكم يكون مقـــدار الجهد المطلق عند سطحها.

(13-9) : عندما تكون ألواح احد مكثفات جهاز راديو مشحونة بـــشحنة قـــدرها $1.8\mu C$ فان فرق الجهد بينهما يكون $9V$. ما مقدار سعة ذلك المكثف ؟.

(14-9) : مساحة كل لوح من لوحي مكثف متوازي اللوحين $280cm^2$ وتفصلهما مسافة $0.5mm$. ما هو مقدار المجال الكهربائي بين اللوحين عندما تكـــون شحنة المكثف $1\mu C$.

(15-9) : ما مقدار الطاقة الحركية التي يكتسبها بروتون إذا تسارع خلال فرق جهد قدره $100\,V$ في الفراغ. 1- بوحدات الجول 2- بوحـــدات الإلكتـــرون فولت.

(16-9) : إذا علمـــت أن الجهـــد الكهربـــائي في منطقـــة معينـــة يـــساوي $V = \dfrac{K}{x^2 + y^2 + z^2}$ أوجد المركبات الثلاثة لـــشدة المجـــال الكهربـــائي بالاتجاهات x , y , z .