

بعض خواص المجموعة المفتوحة

(1) إن لكل نقطة من نقاط المجموعة المفتوحة يوجد جوار ينتمي بأجمعه للمجموعة.

$$(2) S \Leftrightarrow S^{\circ} = S \text{ مفتوحة.}$$

(3) S° هي أكبر مجموعة جزئية مفتوحة من S .

مثال: إن مجموعة النقاط

$$\{ Z : |Z| > 2 \} \text{ مفتوحة}$$

(9) المجموعة المغلقة Closed Set

تسمى المجموعة S مجموعة مغلقة إذا احتوت على جميع نقاط تراكمها أي إن $d(S) \leq S$.

ملاحظات

(1) تكون المجموعة S مغلقة إذا فقط إذا كانت المجموعة المكملة S^c مفتوحة.

(2) إن بعض المجموعات قد تكون ليست مفتوحة وليست مغلقة.

مثال: إن المجموعة $S = \{ Z : 0 < |Z| \leq 1 \}$ هي ليست مفتوحة وليست مغلقة.

مثال: إن المجموعة الخالية \emptyset ومجموعة الأعداد المعقدة C هما مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان معاً.

(10) المجموعة المتراسة Compact Set

تسمى المجموعة S مجموعة متراسة إذا كانت S مجموعة مغلقة ومحددة.

مثال: إن المجموعة $S = \{ Z : |Z| \leq 1 \}$ هي مجموعة متراسة وذلك لأنها مغلقة

ومحددة.

(11) المجموعة القابلة للعد Countable Set

إذا أمكن إيجاد مقابلة واحد بواحد بين عناصر مجموعة ما وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية N تسمى هذه المجموعة قابلة للعد.

(12) المجموعة المتصلة Connected Set

تسمى المجموعة S متصلة إذا أمكن وصل اية نقطتين فيها بمسار مضلعي الشكل يتكون من عدد منته من قطع المستقيمت مسلسلة الاتصال بحيث تكون جميعها واقعة داخل S .

مثال: إن المجموعة $\{ Z : |Z| < 1 \}$ هي مجموعة متصلة.

(13) انغلاق المجموعة Closer & a Set

إن انغلاق المجموعة S ويرمز له بـ \bar{S} هي المجموعة المتكونة من اتحاد عناصر S مع عناصر

$$d(S) \text{ أي أن } \bar{S} = S \cup d(S)$$

بعض صفات الانغلاق

$$S \subseteq \bar{S} \quad (1)$$

$$S \text{ مغلقة} \Leftrightarrow S = \bar{S} \quad (2)$$

$$\bar{S} \text{ مغلقة لاحتوائها على جميع نقاط التراكم.} \quad (3)$$

(14) المنطقة المفتوحة Open Region, Domain

وهي مجموعة نقاط مفتوحة ومتصلة.

مثال: $\{Z : |Z| < 2\}$

(15) المنطقة المغلقة Closed Region

وهي مجموعة نقاط مغلقة ومتصلة

مثال: $\{Z : |Z| \leq 2\}$

المنطقة Region

المنطقة المفتوحة مع قسم ، كل ، أو بدون نقاط التراكم تسمى منطقة، إذا أضيفت جميع نقاط التراكم فالمنطقة تكون مغلقة وإذا لا يوجد أي نقطة تراكم فالمنطقة تكون مفتوحة.

مثال: مهم وشامل لجميع الحالات

ليكن لدينا مجموعة S المعرفة بالصيغة:

$$S = \left\{ \frac{i}{n} \right\} = \left\{ i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{4}i, \frac{1}{5}i, \dots \right\}$$

(1) ما هي النقاط الداخلية وما هي النقاط المحيطة؟

الجواب: بما ان كل جوار لأي نقطة من S يحوي على نقاط تنتمي للمجموعة S ونقاط لا تنتمي للمجموعة S، إذا جميع النقاط المنتمية للمجموعة S ومن ضمنها الصفر هي نقاط محيطة وبذلك فإن المجموعة S لا تحوي نقاط داخلية.

(2) هل يوجد نقاط تراكم وما هي؟

الجواب: بما ان جوار للنقطة $Z = 0$ يتقاطع مع مجموعة S بعدد منته من النقاط فإن النقطة $Z = 0$ هي نقطة تراكم وان $\{0\} \neq \emptyset - \{0\} \cap N(0, \epsilon) \cap S$ في الحقيقة ان النقطة $Z = 0$ هي نقطة التراكم الوحيدة أي $d(S) = \{0\}$.

(3) هي المجموعة S محددة؟

الجواب: نعم لأن جميع النقاط المنتمية للمجموعة S تحقق صحة المتباينة $|Z| < 2$.

(4) هل المجموعة S مغلقة؟

الجواب: كلا لأن $Z = 0$ وهي نقطة تراكم لا تنتمي للمجموعة S

(5) هل المجموعة S مفتوحة؟

الجواب: كلا لأن S لا تحوي نقاط داخلية.

(6) هل المجموعة S متصلة؟

الجواب: كلا لأنه إذا ربطنا أية نقطتين من المجموعة بمسار فإن ذلك المسار يحوي على نقاط لا تنتمي للمجموعة S.

(7) هل المجموعة S منطقة مفتوحة؟

الجواب: كلا لأن المجموعة ليست مفتوحة ومتصلة.

(8) ما هو انغلاق المجموعة S؟

الجواب: إن انغلاق المجموعة S هو اتحاد S مع نقاط تراكمها أي:-

$$\bar{S} = \left\{ 0, i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \dots \right\}$$

والصفر هو نقطة تراكم وحيدة بالنسبة لـ S في هذا السؤال.

(9) ما هي المجموعة المكملة للمجموعة S

الجواب: ان المجموعة المكملة لـ S هي مجموعة كل النقاط التي لا تنتمي إلى S أي:

$$S^c = \left\{ Z : Z \neq i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \dots \right\}$$

(10) هل المجموعة S متراسة؟

الجواب: بما أن المجموعة S هي محددة ولكنها ليست مغلقة فإن S ليست متراسة.

(11) هل المجموعة S قابلة للعد

الجواب: نعم لأنه يوجد تقابل بين S ومجموعة الأعداد الطبيعية.