2) الجذور Roots

ليكن z عددا" مركبا" معلوما" و n عدد صحيح موجب . الجذر ذات الرتبة n الى z او $Z^{\frac{1}{n}}$ هو العدد المركب w الذي يحقق المعادلة

$$W^n = z \qquad \ldots(*)$$

اذا كان

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

فعند التعويض في (*) نحصل على

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

أي ان

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = r^{\frac{1}{n}}$$

أي الجذر الحقيقي الموجب للعدد الحقيقي r . كما ان

$$n\varphi = \theta + 2k\pi = \arg z$$

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\arg z}{n}$$

فيكون

$$W = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad \ldots(**)$$

نلاحظ ان (**) تعطينا قيما" مختلفة الى w عندما يكون k عددا" صحيحا" لا يقبل القسمة على n وبهذا نحصل على n من الجذور المختلفة الى z عندما نضع

$k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ فـــي (**)

سنسمي العدد $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{Arg\,z}{n} + i\sin\frac{Arg\,z}{n}\right)$ بالقيمة الرئيسية إلى $Z^{\frac{1}{n}}$

نعيد الآن كتابة (**) بالشكل التالي

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{Arg\,z}{n} + i\sin\frac{Arg\,z}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

وبما أن $\arg 1 = 2k\pi$

لذا فان القوس الثاني في الطرف الأيمن يمثل الجذور ذات الرتبة n للواحد الصحيح وهذا يعني انه بمكاننا الحصول على جميع الجذور المختلفة إلى z وذلك بإيجاد قيمة الجذر الرئيسية ثم ضربها بالقيم المختلفة لجذور الواحد الصحيح أي حلول المعادلة $w^n = 1$.

ملاحظة /

من الممكن استخدام **صيغة اويلر** للحصول على معادلة إيجاد جذور الأعداد المركبة وكما يلي

$$W=\left(\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta}{n}i}\right)\left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)$$

مثــال :أوجد الجذر التكعيبي للعدد (i + 1-) أو أوجد ناتج $Z^3 = -1+i$

الحـل:

نكتب العدد المعقد (i + 1-) بصيغته القطبية فتكون قيمته المطلقة $\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}$

وزاويته هي $\phi=\tan^{-1}\frac{1}{-1}=\frac{3\pi}{4}$ وان $n = 3, k = 0,1,2$.

الان عندما $k = 0$

$$w_3^0=(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3})=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3\pi}{12}i}=2^{\frac{1}{6}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

عندما يكون $k =1$

$$w_3^1=(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12})(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3\pi}{12}i}e^{\frac{2\pi}{3}i}=2^{\frac{1}{6}}\left\{e^{\frac{11\pi}{12}i}\right\}$$

عندما يكون $k = 2$

$$w_3^2=(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12})(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3\pi}{12}i}e^{\frac{4\pi}{3}i}=2^{\frac{1}{6}}\left\{e^{\frac{19\pi}{12}i}\right\}$$

تمارين متنوعة

س1/ اكتب العددين الآتيين بصيغة اويلر

أ) $2+2\sqrt{3}\,i$ ب) $-5+5i$

س2/ جد قيمة واحدة لزاوية العدد المعقد Z عندما

أ- $Z=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ ب- $Z=\dfrac{i}{-2-2i}$

س3/ جد كل الجذور $(-i)^{1/3}$ ، $(i)^{2/3}$ ، $(-1)^{-3/4}$

س4/ جد قيم كل الجذور أ) $\sqrt{1+i}$ ب) $\sqrt{-i}$

س5/اكتب كل مما يلي بالشكل الديكارتي

أ- $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$ ب- $(-2\,i)^7$ ج- $(2+i)^6$

س6/ أ)إذا كان $z=r\,e^{i\theta}\neq 1$ أوجد قيمة الجزء الخيالي ومعيار العدد $\dfrac{1+z}{1-\bar{z}}$ بدلالة r,Θ .

ب) إذا كان $z=r\,e^{i\theta}\neq 1$ أوجد قيمة الجزء الحقيقي ومعيار العدد $(i+z)e^{i\frac{\pi}{2}}$ بدلالة r,Θ .

7) Solve the following eq.

a/ $Z^4-4=0$, b/ $Z^4+1=0$

8) Solve the following eq.

$Z^6+2Z^3+2=0$

Hint : let $x=Z^3$

9) Denote the roots of the equation $(Z+1)^5+Z^5=0$ by Z_k , k=0,1,2,3,4.

Show that Re (Z_k= - 1/2) .Hint : dividing both side of eq. by Z^5

10) if $X_n+iY_n=(1+i\sqrt{3})^n$ Prove that $X_{n-1}Y_n+X_nY_{n-1}=2^{2n-2}\sqrt{3}$

Hint: $1+i\sqrt{3}=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$

11) prove that : $\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$

12) Prove that: $\cos^2 z+\sin^2 z=1$