العمليات الأربعة على الأعداد المعقدة

تتم عمليات جمع وطرح وقسمة الأعداد المعقدة بإتباع قواعد الجمع والطرح والضرب والقسمة للأعداد الحقيقية مع ملاحظة $i^2 = -1$ على النحو الآتي

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + iy_2$$

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 - y_2)$$

$$Z_1 \,.\, Z_2 = (x_1 + iy_1) (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

حاصل قسمة العدد Z_1 على العدد Z_2 ($Z_2 \neq 0$) يكتب بالصيغة $\frac{Z_1}{Z_2}$ هو العدد Z بحيث يحقق العلاقة

$$Z_1 = Z Z_2$$

$$x_1 + iy_1 = (x + iy) (x_2 + iy_2)$$

وبمساواة الجزئين الحقيقي والخيالي وبعد فتح القوسين ينتج

$$x_1 = x x_2 - y y_2$$

$$y_1 = x y_2 + y x_2$$

وبحل هاتين المعادلتين للحصول على $y \,\&\, x$ نجد أن

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad \& \quad y = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

اذاً حاصل القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$ ($Z_2 \neq 0$) هو

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + i\, y_1}{x_2 + i\, y_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مرافق العدد المعقد (Complex Conjugate)

أن مرافق العدد المعقد $Z = x + iy$ ويرمز له بالرمز $\overline{Z}$ هو العدد المعقد $\overline{Z} = x - i y$
أي أن المرافق للعدد المعقد ينتج بتغير أشارة الجزء الخيالي فيه .

مثال

أن مرافق العدد $Z = 5 - 2i$ هو $\overline{Z} = 5 + 2i$

بعض خواص العدد المرافق

(1) $Z = 0 \Longleftrightarrow \overline{Z} = 0$

(2) $\overline{Z} = \overline{x + iy} = x - iy$

(3) $\overline{i} = -i$ & $\overline{-i} = i$

(4) $\overline{\overline{Z}} = Z$

(5) $\overline{Z} = -Z$ (اذا كان العدد المعقد خيالي صرف)

(6) $\overline{Z} = Z$ (اذا كان العدد المعقد حقيقي)

(7) $Z\overline{Z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

(8) $Z + \overline{Z} = 2\mathrm{Re}(Z) = 2X \Rightarrow \mathrm{Re}(Z) = \frac{Z + \overline{Z}}{2}$

(9) $Z - \overline{Z} = 2i\,\mathrm{Im}(Z) = 2iy \Rightarrow \mathrm{Im}(Z) = \frac{Z - \overline{Z}}{2i}$

(10) $(z_1 \pm z_2) = z_1 \pm z_2$

(11) $\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{Z_1} . \overline{Z_2}$

(12) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}, Z_2 \neq 0$