المحاضرة الرابعة

الصيغ التقاربية (Asymptotic notations)

برهنت عملية تحديد عد الخطوات (عد العمليات) لخوارزمية ما على انها مهمة عالية الصعوبة ولذلك اصطلح على استعمال تدوينات تقاربية ذات معنى لتعقيدات الخوارزمية.

١) صيغة الحد الاعلى (Big-Oh)

تعريف:- $f(n)=O(g(n))$ اذا وفقط اذا وجد ثابتان موجبان c $(c > 0)$ و n_0 $(n_0 \geq 0)$ بحيث يكون $f(n) \leq c\, g(n)$ لجميع قيم $n \geq n_0$.

يقول التعريف ان الدالة f على الأكثر تنمو بسرعة ثابت معين c مضروب في الدالة g.

نظرية/ اذا كانت $f(n)= a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} +\ldots+ a_1 n + a_0$ متعددة حدود درجتها m فان $f(n)= O(n^m)$.

مثال/ $3n+2= O(n)$

لأن $3n+2 \leq 4n$ لجميع قيم $n \geq 2$

مثال/ $100=O(1)$

لأن $100 \leq 100*1$ لجميع قيم $n \geq 0$

مثال/ $10n^2 + 4n + 2=O(n^2)$

لأن $10n^2 + 4n + 2 \leq 11n^2$ لجميع قيم $n \geq 5$

مثال/ $6*2^n + n^2= O(2^n)$

لأن $6*2^n + n^2 \leq 7*2^n$ لجميع قيم $n \geq 4$

مثال/ $3n+2 \neq O(1)$ و $10n^2 + 4n + 2 \neq O(n)$

2) صيغة الحد الادنى (Big-Omega)

تعريف:- $f(n)= \Omega (g(n))$ اذا وفقط اذا وجد ثابتان موجبان c $(c > 0)$ و n_0 $(n_0 \geq 0)$ بحيث يكون $f(n) \geq c\, g(n)$ لجميع قيم $n \geq n_0$.

يقول التعريف ان الدالة f على الاقل تنمو بسرعة ثابت معين c مضروب في الدالة g،
وكما واضح من التعريف فان $f(n)= \Omega(g(n))$ اذا وفقط اذا $g(n)=O(f(n))$.

نظرية/ اذا كانت $f(n)= a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} +\ldots+ a_1 n + a_0$ متعددة حدود درجتها m فان $f(n)= \Omega (n^m)$.

مثال/ $3n+2= \Omega (n)$

لأن $3n+2 \geq 3n$ لجميع قيم $n \geq 0$

مثال/ $100= \Omega (1)$

لأن $100 \geq 100*1$ لجميع قيم $n \geq 0$

مثال/ $10n^2 + 4n + 2= \Omega (n^2)$

لأن $10n^2 + 4n + 2 \geq 10n^2$ لجميع قيم $n \geq 0$

مثال/ $6*2^n + n^2= \Omega (2^n)$

لأن $6*2^n + n^2 \geq 6*2^n$ لجميع قيم $n \geq 0$

مثال/ $3n+2 \neq \Omega (n^2)$ و $10n^2 + 4n + 2 \neq \Omega (n^3)$

٣) صيغة الحد الأعلى- الادنى (Big-Theta)

تعريف:- $f(n) = \Theta(g(n))$ اذا وفقط اذا وجدت ثوابت موجبة n_0 و c_1 و c_2 بحيث يكون $c_1\, g(n) \le f(n) \le c_2\, g(n)$ لجميع قيم $n \ge n_0$.

نظرية/ اذا كانت $f(n)= a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ متعددة حدود درجتها m فان $f(n)= \Theta(n^m)$

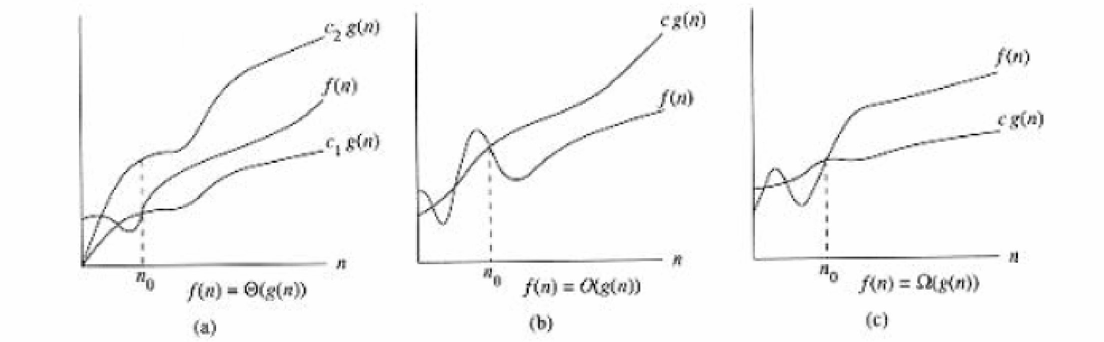
مثال/ $3n+2= \Theta(n)$
لأن $3n \le 3n+2 \le 4n$ لجميع قيم $n \ge 2$

مثال/ $100= \Theta(1)$
لأن $100*1 \le 100 \le 100*1$ لجميع قيم $n \ge 0$

مثال/ $10n^2 + 4n + 2= \Theta(n^2)$
لأن $10n^2 \le 10n^2 + 4n + 2 \le 11n^2$ لجميع قيم $n \ge 5$

مثال/ $3n+2 \ne \Theta(n^2)$ و $3n+2 \ne \Theta(1)$

ملاحظة/ هذه الصيغة هي الأكثر دقة وتتحقق اذا كان $g(n)$ هو الحد الأدنى والأعلى للدالة $f(n)$.



مسألة/ برهن ان العلاقات التالية صحيحة

1) $5n^2 - 6n = \Theta(n^2)$
2) $38n^3 + 4n^2 = \Omega(n^3)$

الصيغ الشائعة لتعقيدات الوقت والخزن

هذه بعض الصيغ الشائعة الاستخدام في التعقيدات

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$$

الخوارزميات التي لها تعقيدات اكبر من $O(n \log n)$ تعد غير عملية والخوارزميات التي لها تعقيدات اسية $O(2^n)$ مخيفة ولا تكون عملية الا عندما تكون n صغيرة جدا(اقل من ٤٠).

توضيح/ بافتراض حاسوب ينفذ $١٠^٩$ ايعاز بالثانية وعندما تكون $f(n)=2^n$ فان:

n=	10	20	30	40	50	100	1000
f(n)=	1µs	1ms	1sec	18.3min	13day	$4*10^{13}$ year	$32*10^{238}$ year