المحاضرة الخامسة

القوانين الاستنتاجية للصيغ التقاربية

1) $\{f_i(n) = \oplus(g_i(n)), 1 \le i \le k\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} f_i(n) = \oplus(\max_{1\le i\le k}\{g_i(n)\})$

2) $\{f_i(n) = \oplus(g_i(n)), 1 \le i \le k\} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{k} f_i(n) = \oplus(\prod_{i=1}^{k} g_i(n))$

3) $\{f_1(n) = O(g_1(n)), f_2(n) = \Theta(g_2(n))\} \quad \Rightarrow \quad f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$

4) $\{f_1(n) = \Theta(g_1(n)), f_2(n) = \Omega(g_2(n))\} \quad \Rightarrow \quad f_1(n) + f_2(n) = \Omega(g_1(n) + g_2(n))$

5) $\{f_1(n) = O(g(n)), f_2(n) = \Theta(g(n))\} \quad \Rightarrow \quad f_1(n) + f_2(n) = \Theta(g(n))$

6) $\{f_1(n) = O(g_1(n)), \text{and } g_2(n)\} \quad \Rightarrow \quad f_1(n) \times g_2(n) = O(g_1(n) \times g_2(n))$

7) $\{f(n) = \oplus(g(n)), g(n) = \oplus(h(n))\} \quad \Rightarrow \quad f(n) = \oplus(h(n))$

8) $f(n) = \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \Theta(f(n))$

9) $f(n) = O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \Omega(f(n))$

المتماثلات التقاربية

الجدول التالي يوضح هذه المتماثلات:-

f(n)	Asymptotic
C	$\oplus(1)$
$\sum_{i=0}^{k} c_i n^i$	$\oplus(n^k)$
$\sum_{i=1}^{n} i$	$\oplus(n^2)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\oplus(n^3)$
$\sum_{i=1}^{n} i^k \quad , \quad k > 0$	$\oplus(n^{k+1})$
$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad , \quad r > 1$	$\oplus(r^n)$
$n!$	$\oplus((n/e)^n)$
$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	$\oplus(\log n)$

تنويه/ الرمز $\oplus$ يمكن ان يكون Ω, O, Θ.

مثال٨/ عودة لبعض المسائل السابقة واعادة تحليلها بالصيغ التقاربية.

١- الخوارزمية sum

1. ……… $\mathbf{\Theta(1)}$
2. ……… $\mathbf{\Theta(n)}$
3. ……… $\mathbf{\Theta(n)}$
5. ……… $\mathbf{\Theta(1)}$

$$S_{sum}(n) = \Theta(1) \quad , \quad T_{sum}(n) = \Theta(n)$$

٢- الخوارزمية add

1. ……… $\mathbf{\Theta(m)}$
2. ……… $\mathbf{\Theta(n)}$
3. ……… $\mathbf{\Theta(mn)}$
6. ……… $\mathbf{\Theta(mn)}$

$$S_{add}(n,m) = \Theta(mn) = \Theta(n^2)\text{ , if } n = m$$
$$T_{add}(n,m) = \Theta(mn) = \Theta(n^2)\text{ , if } n = m$$

٣- الخوارزمية fibonacci

1. ………. $\mathbf{\Theta(1)}$
2. ………. $\mathbf{\Theta(1)}$
4. ………. $\mathbf{\Theta(1)}$
5. . …….... $\mathbf{\Theta(1)}$
6. ………. $\mathbf{\Theta(n)}$
7. ………. $\mathbf{\Theta(n)}$
8. . ……... $\mathbf{\Theta(n)}$
9. ………. $\mathbf{\Theta(n)}$
12. ……… $\mathbf{\Theta(1)}$

$$S_{fibonacci}(n) = \Theta(1) \quad , \quad T_{fibonacci}(n) = \Theta(n)$$

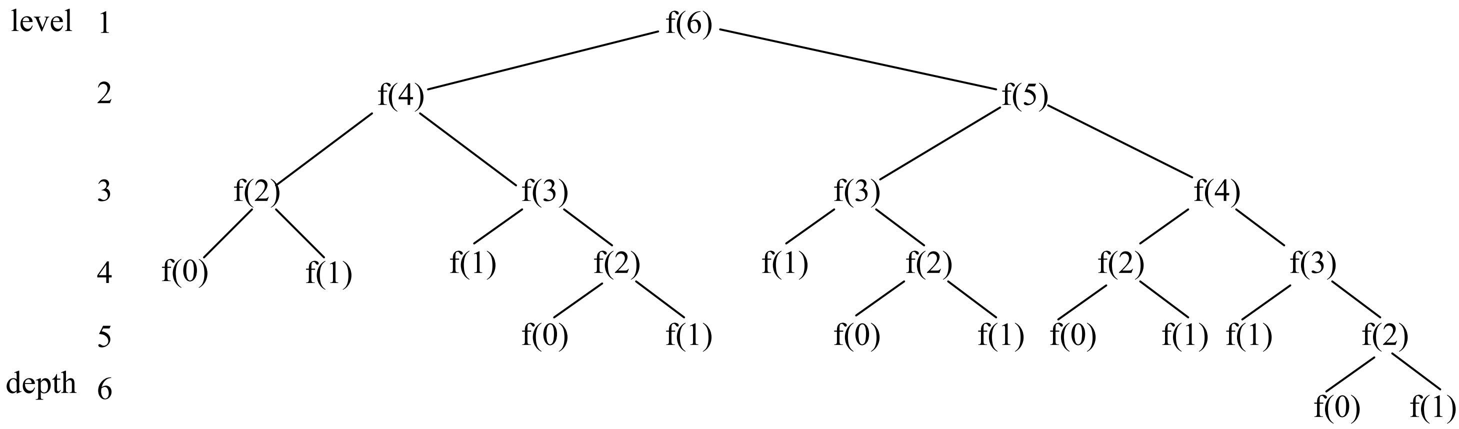
مثال٩/ حل مسألة فيبوناتشي باستخدام اسلوب التداخل(recursion).

$$fibo(n) = \begin{cases} n & , \quad n < 2 \\ fibo(n-1) + fibo(n-2) & , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

الخوارزمية التالية تقوم بحل المسألة

```
Algorithm Rfibonacci (n):
Input: a nonnegative integer n.
Output: fib, the nth term of the fibonacci sequence.
if  n < 2 then
   fib ←—— n
else
   fib ←——  Rfibonacci(n-1)+Rfibonacci(n-2)
end if
return  fib
```

<u>تعقيدات الوقت:-</u> في هذه الخوارزمية يتم بناء شجرة التنشيطات(الاستدعاءات) لمعرفة تعقيدات الوقت.



"شجرة التنشيطات"

في الشجرة الثنائية اقصى عدد للعقد هو $2^k - 1$ حيث يمثل k عمق الشجرة (depth) لذلك

$$T_{Rfibonacci}(n)=O(2^n)$$

<u>واجب/</u> حل مسألة فيبوناتشي باستخدام التداخل بحيث تصبح تعقيدات وقتها خطية وليست اسية.