الفصل الخامس

المتتابعات والمتسلسلات

أنا لم أفشل لكنني وجدت عشرة آلاف طريقة لا تعمل.

توماس أديسون

المتتابعـــة *Sequence*

تعرف متتابعة الاعداد المعقدة بأنها دالة منطلقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومداها أعـــداد معقدة.

إذا كانت f ترمز لهذه الدالة فإن قيمها تكتب بالشكل :

$$f(1), f(2), \ldots\ldots, f(n)$$

لغرض السهولة سوف نرمز لمتتابعة الأعداد المعقدة بالرمز:

$$\{ Z_n \} = \{ Z_1 , Z_2 , \ldots\ldots, Z_n \}$$

حيث $Z_n = f(n)$ لكل قيم $n= 1, 2, 3, \ldots\ldots$

مثـــــال: ان المتتابعة $\{ i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots\ldots.. \}$ تمثـل دالــة منطلقهــا الاعــداد الصحيحة الموجبــة وحيــث ان الاعــداد الــصحيحة $1, 2, 3, \ldots..$ تقابلهــا الاعــداد المعقــدة $i, i^2, i^3, i^4, \ldots\ldots..$

أي ان $f(n) = i^n$ ولغرض السهولة يرمز لهذه المتتابعة بالرمز $\{ i^n \}$.

حدود المتتابعة Terms of Sequence

ان الاعداد $Z_1, Z_2, \ldots\ldots.$ يطلق عليها اسم حدود المتتابعة وبصورة خاصة الحــد Z_n يــدعى بالحد العام أو الحد n.

المتتابعة الثابتة Constant Sequence

هي المتتابعة $\{ Z_n \}$ التي فيها جميع الحدود متساوية, أي ان $Z_k = Z_{k+1}$ لكل $k=1, 2, 3$

المتتابعة المتقاربة Convergent Sequence

تكون المتتابعة $\{ Z_n \}$ متقاربة نحو Z عندما تتزايد n بلا تناه أي $n\to\infty$ وتكتب $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

إذا كـــان لكـل $\in > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيــث ان $| Z_n - Z | < \in$ لكــل قــيم $n > N$. أي ان لكل n الكبيرة بما فيه الكفاية تكون النقاط Z_n قريبة مــن Z (أي ان Z_n تقــع بجوار Z الذي بعده $\in$) إذا لم تكن المتتابعة $\{ Z_n \}$ متقاربة فتدعى متباعدة (Divergent).

مبرهنـــــة

لتكن $Z = x + i\,y$ **&** $Z_n = x_n + i\,y_n$ **فإن**

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

مثـــــال: **هل المتتابعة** $\left\{ \frac{i}{n} \right\}$ **متقاربة ؟**

الحـــــل: **نعم ان المتتابعة** $\left\{ \frac{i}{n} \right\}$ **متقاربة نحو الصفر وذلك لأن عندما** $n\to\infty$ **فإن** $\frac{1}{n} \to 0$

السلسلة **Series**

لتكن { Z_n } **متتابعة إن المجموع**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots\dots\dots + z_n + \dots\dots\dots$$

يعرف بسلسلة الاعداد المعقدة اللانهائية حيث Z_n **هو الحد الذي ترتيبه** n **إذا كان**

$S_1 = Z_1$
$S_2 = Z_1 + Z_2$
$S_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$
:
:
$S_n = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots\dots + Z_n$

فإن S_n **يسمى المجموع الجزئي (Partial Sum) للسلسلة**