

## الفصل الخامس

### نتيجة ٣:

إذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين , فإنهما تكونان زوجا خطيا.

### البرهان:

لتكن  $\angle BAC, \angle CAD$  زاويتين متكاملتين .

نلاحظ ان B,D يقعان في جهتين مختلفتين من الخط AC .  
يجب ان نبرهن ان :

١-  $\vec{AD}, \vec{AB}$  شعاعين متعاكسين.

وان

٢-  $\angle 1, \angle 2$  تكونان زوجا خطيا.

الان ليكن  $\vec{AE}$  الشعاع المعاكس للشعاع  $\vec{AB}$  .

وحسب Th27 : D,E يقعان في نفس الجهة من الخط AC .

بما ان  $\vec{AE}$  هو الشعاع المعاكس للشعاع  $\vec{AB}$  .

نحصل  $\angle 1, \angle 4$  تكونان زوجا خطيا.

وحسب Th57 :  $\angle 1, \angle 4$  متكاملتين.

ولكن  $\angle 1, \angle 2$  متكاملتين وحسب Ax15 :  $\angle 1 \cong \angle 1$

وحسب نتيجة ١ :  $\angle 1 \cong \angle 4$  .

وحسب Ax14 :  $\vec{AD} = \vec{AE}$  .

وعليه يكون  $\vec{AD}$  هو الشعاع المعاكس للشعاع  $\vec{AB}$  وان  $\angle 1, \angle 2$  تكونان زوجا خطيا.

### جمع وطرح الزوايا:

### مبرهنة ٥٩:

إذا كان  $\angle ABC \cong \angle DEF$  وان BG شعاع في داخل  $\angle ABC$  , فانه يوجد شعاع  $\vec{EH}$  في داخل  $\angle DEF$  بحيث ان  $\angle ABG \cong \angle DEH, \angle GBC \cong \angle HEF$  .

### البرهان:

من Ax11: نختار النقاط D,F بطريقة لا تؤثر على المفهوم العام , بحيث ان  $A - B \cong D - E$

و  $C - B \cong F - E$  .

ومن Th SAS :  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  وان  $A - C \cong D - F$  ,  $\angle BAC \cong \angle EFD$  و

$\angle BAC \cong \angle EDF$  .

بما ان  $\vec{BG}$  يمر برأس الزاوية  $\angle BAC$  ويقع في داخل الزاوية , فانه من Th44 ,  $\vec{BG}$  يقطع A-C في نقطة ولنكن M .

بما ان  $A - C \cong D - F$  وان A-M-C , من Th52 : توجد نقطة N بحيث ان

$D - N \cong A - M$  وان D-N-F .

من Th 46 , وتعريف شعاع بين شعاعين: يكون الشعاع  $\vec{EN}$  هو الشعاع المطلوب  $\vec{EH}$  , الذي يقع في داخل  $\angle DEF$  .

بما ان  $A-M \cong D-N$  و  $A-C \cong D-F$  و  $A-M-C$  و  $D-N-F$  .

فانه من Th51 يكون  $M-C \cong N-F$

في المثلثين  $ABM$  و  $DEN$

$$\angle BAM \cong \angle EDN \longleftarrow \angle BAM = \angle BAC \cong \angle EDF = \angle EDN$$

$$\longleftarrow \Delta DEN \cong \Delta ABM : \text{Th SAS} \text{ , فانه من } A-B \cong D-E \text{ و } A-M \cong D-N$$

$\angle ABM \cong \angle DEN$  . وبفس الطريقة , فان المثلثين  $MBC$  و  $NEF$  يتطابقان , ولذلك فان

$$\angle MBC \cong \angle NEF$$

$$\angle ABG = \angle ABM \cong \angle DEN = \angle DEH$$

لذلك ,  $\angle ABG \cong \angle DEH$  ,

$$\angle GBC = \angle MBC \cong \angle NEF = \angle HEF$$

$$\angle GBC \cong \angle HEF$$

مبرهنة ٦٠ : ( جمع الزوايا )

لتكن  $\angle ABC$  و  $\angle DEF$  زاويتين لهما , على التوالي , الشعاعين  $BG$  و  $EH$  يقعان في داخلهما

و  $\angle GBC \cong \angle HEF$  , و  $\angle ABG \cong \angle DEH$  فان

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

البرهان:

من Ax14 : يوجد شعاع  $\vec{BM}$  في جهة الخط  $BC$  التي تحتوي  $A$  بحيث ان

$$\angle MBC \cong \angle DEF$$

بما ان  $\vec{EH}$  في داخل  $\angle DEF$  , فانه من Th59 , يوجد شعاع  $\vec{BN}$  في داخل  $\angle MBC$  بحيث

ان  $\angle NBC \cong \angle HEF$  و  $\angle MBN \cong \angle DEH$  ولكن من الفرض  $\angle GBC \cong \angle HEF$  , لذلك من

$$\text{Ax15 : } \angle GBC \cong \angle NBC \text{ , ومن Ax14 : } \vec{BN} = \vec{BG}$$

$$\text{لذلك } \angle MBG = \angle MBN \cong \angle DEH \cong \angle ABG$$

$$\text{ومن هذا } \angle MBG \cong \angle ABG \text{ ومن Ax14 : } \vec{BA} = \vec{BM}$$

$$\text{لذلك , } \angle ABC = \angle MBC \cong \angle DEF$$

$$\text{أي ان } \angle ABC \cong \angle DEF$$

مبرهنة ٦١ : ( طرح الزوايا )

اذا كان  $\angle CBD \cong \angle GFH$  و  $\angle DBA \cong \angle HFE$  وان الشعاعين  $\vec{BA}$  و  $\vec{FE}$  يقعان في داخل

$\angle CBD$  و  $\angle GFH$  , على التوالي , فان  $\angle ABC \cong \angle EFG$  .

البرهان:

بما ان  $\angle CBD \cong \angle GFH$  وان  $\vec{BA}$  شعاع في داخل  $\angle DBC$  , فانه من Th59 , يوجد شعاع

$\vec{FI}$  في داخل  $\angle GFH$  بحيث ان  $\angle DBA \cong \angle HFI$  و  $\angle ABC \cong \angle IFG$  .

لكن من الفرض  $\angle DBA \cong \angle HFE$  , فانه من Ax15 :  $\angle HFE \cong \angle HFI$  .

$$\text{ومن Ax14 : } \vec{FE} = \vec{FI}$$

$$\text{لذلك } \angle ABC \cong \angle EFG$$

مقارنة الزوايا:

**تعريف :** تكون  $\angle ABC$  اصغر من  $\angle DEF$  اذا وفقط اذا يوجد شعاع  $\vec{EH}$  في داخل  $\angle DEF$  بحيث ان  $\angle ABC \cong \angle HEF$  ويرمز لهذا بالرمز  $\angle ABC < \angle DEF$  .  
مبرهنة ٦٢:

لاي زوج من الزوايا , وليكن  $\angle A, \angle B$  , فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي:  
 $\angle A < \angle B$  و  $\angle A \cong \angle B$  و  $\angle B < \angle A$   
البرهان: ؟

**مبرهنة ٦٣:**

اذا كان  $\angle A < \angle B$  و  $\angle A \cong \angle C$  , فان  $\angle C < \angle B$  .  
البرهان:

لتكن  $\angle B = \angle DBE$  .

بما ان  $\angle A < \angle B$  , ومن تعريف اصغر زاوية : يوجد شعاع  $\vec{BF}$  في داخل  $\angle B$  بحيث ان  
 $\angle A \cong \angle FBE$  .  
ومن الفرض  $\angle A \cong \angle C$  : Ax15 , فانه من  $\angle C \cong \angle FBE$  .  
ومن Th28 :  $\angle C < \angle B$  .

**مبرهنة ٦٤:**

اذا كان  $\angle A < \angle B$  و  $\angle B \cong \angle C$  فان  $\angle A < \angle C$  .  
البرهان:

لتكن  $\angle B = \angle DBE$  و  $\angle C = \angle GCH$  .

بما ان  $\angle A < \angle B$  , فانه من تعريف اصغر زاوية , يوجد شعاع  $\vec{BF}$  في داخل  $\angle B$  بحيث ان  
 $\angle A \cong \angle FBE$  .  
 $\angle B \cong \angle C$  و  $\vec{BF}$  في داخل  $\angle B$  , فانه من Th59 : يوجد شعاع  $\vec{CI}$  في داخل  $\angle C$  بحيث ان  
 $\angle FBE \cong \angle ICH$  .  
وبما ان  $\angle A \cong \angle FBE$  , فانه من Ax15 ,  $\angle A \cong \angle ICH$  ,  
ومن تعريف اصغر زاوية , نحصل على  $\angle A < \angle C$  .

**مبرهنة ٦٥:**

اذا كان  $\angle A < \angle B$  و  $\angle B < \angle C$  فان  $\angle A < \angle C$  .  
البرهان:

لتكن  $\angle B = \angle DBE$  و  $\angle C = \angle GCH$  .

بما ان  $\angle A < \angle B$  , فانه من تعريف اصغر زاوية , يوجد شعاع  $\vec{BF}$  في داخل  $\angle B$  بحيث ان  
 $\angle A \cong \angle FBE$  .

وكذلك  $\angle B < \angle C$  , فانه يوجد شعاع  $\vec{CI}$  في داخل  $\angle C$  بحيث ان  $\angle B \cong \angle ICH$  .

وبما ان  $\vec{BF}$  في داخل  $\angle B$  , فانه من Th59 , يوجد شعاع  $\vec{CJ}$  في داخل  $\angle ICH$  بحيث ان  
 $\angle FBE \cong \angle JCH$  .

وبما ان  $\angle A \cong \angle FBE$  , فانه من Ax15 ,  $\angle A \cong \angle JCH$  .

من تعريف شعاع بين شعاعين : الشعاع  $\vec{CJ}$  يقع بين  $\vec{CI}$  و  $\vec{CH}$  وان  $\vec{CI}$  يقع بين  $\vec{CG}$  و  $\vec{CH}$  ومن Th47,a :  $\vec{CJ}$  يقع بين  $\vec{CH}$  و  $\vec{CG}$  أي ان  $\vec{CJ}$  يقع داخل  $\angle C$  وبما ان  $\angle A \cong \angle JCH$  فانه من تعريف اصغر زاوية  $\angle A < \angle C$ .