

تعريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R يسمى العنصر b في المجموعة A باصغر عنصر (Least element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا وفقط اذا كان :

$$bRx, \forall x \in A$$

امثلة:

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15\} \text{ لتكن}$$

ولتكن كل من R_1, R_2, R_3 علاقة معرفة على A كالآتي:

$$R_1 = \{(x, y) \in AXA \mid x \leq y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in AXA \mid x \geq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in AXA \mid y \text{ accept divided on } x\}$$

فتكون كل من R_1, R_2, R_3 علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 3 اصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لان

$$3 \leq x, \forall x \in A$$

وان العدد 15 اصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لان

$$15 \geq x, \forall x \in A$$

كذلك يكون العدد 3 اصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة R_3 وذلك لان كل عنصر في A يقبل القسمة على 3.

٢- لتكن A مجموعة الاعداد الطبيعية , ولتكن R علاقة على A معرفة كالآتي:

$$R = \{(x, y) \in AXA \mid x \leq y\}$$

فتكون R علاقة ترتيب جزئي على A ويكون العدد صفر اصغر عنصر في A بالنسبة الى R , وذلك لانه

$$0 \leq x, \forall x \in A$$

لاحظ انه لا يوجد عنصر اكبر منه في A بالنسبة للعلاقة R .

٣- لتكن X مجموعة ما, ولتكن R علاقة معرفة على $p(x)$ كالآتي:

$$R = \{(A, B) \in p(x)xp(x) \mid A \subseteq B\}$$

فتكون R علاقة ترتيب جزئي على A والمجموعة الخالية هي اصغر عنصر بالنسبة للعلاقة R وذلك لانه :

$$\forall A \in p(x), \emptyset \subseteq A$$

مبرهنة: لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R فاذا احتوت المجموعة A اصغر عنصر في A فان العنصر وحيد .

البرهان:

لنفرض أن كلا من b, b' عنصر اصغر في A فمن تعريف العنصر الاصغر ينتج أن

$$b' R b \wedge b R b'$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة فان

$$b' R b \wedge b R b' \rightarrow b=b'$$

فاذن هناك عنصر اصغر واحد فقط .

تعريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر a في المجموعة A بالعنصر الاكبر (greatest element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا وفقط اذا كان :

$$xRa, \forall x \in A$$

امثلة:

$$A=\{3,5,6,9,10,12,13\} \text{ - لتكن } 1$$

ولتكن كل من R_1, R_2, R_3 علاقة معرفة على المجموعة A كالآتي:

$$R_1=\{(x,y) \in A \times A \mid x \leq y\}$$

$$R_2=\{(x,y) \in A \times A \mid x \geq y\}$$

$$R_3=\{(x,y) \in A \times A \mid y \text{ accept divided } x\}$$

فتكون كل من R_1, R_2, R_3 علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 13 عنصرا كبر في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لان

$$x \leq 13, \forall x \in A$$

وان العدد 3 عنصر اكبر في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لان

$$x \geq 3, \forall x \in A$$

اما بالنسبة للعلاقة R_3 فلا يوجد عنصر اكبر وذلك لانه لا يوجد عنصر في المجموعة A بحيث يقبل القسمة على كل عنصر في المجموعة A .

٢- لتكن X مجموعة ما، ولتكن R علاقة معرفة على $p(x)$ كالآتي:

$$R=\{(A,B) \in p(x) \times p(x) \mid A \subseteq B\}$$

فتكون R علاقة ترتيب جزئي على A والمجموعة X هي عنصر اكبر بالنسبة للعلاقة R وذلك لانه :

$$\forall A \in p(x), A \subseteq x$$

مبرهنة: لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R فاذا احتوت المجموعة A عنصر اكبر في A فان العنصر وحيد .

البرهان:

نفرض أن كلا من a, a' عنصر اكبر في A فمن تعريف العنصر الأكبر ينتج أن

$$a R a' \wedge a' R a$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة فان

$$a R a' \wedge a' R a \rightarrow a = a'$$

فاذن هناك عنصر اكبر واحد فقط .

تعريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر m في المجموعة A عنصر أعظمي (maximal element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث

$$m R x \wedge m \neq x$$

امثلة:

$$A = \{3, 6, 7, 12, 13, 15, 18\}$$

ولتكن كل من R_1, R_2, R_3 علاقة معرفة على A كالآتي:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \geq y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \text{ accept divided } x\}$$

فتكون كل من R_1, R_2, R_3 علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 3 عنصر عظمي في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A بحيث

$$3 \geq x \wedge 3 \neq x$$

وان العدد 18 عنصر عظمي في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A بحيث

$$18 \leq x \wedge 18 \neq x$$

كذلك يكون العدد 7 عنصر كبيراً في A بالنسبة للعلاقة R_3 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A يقبل القسمة على 7 وفي الوقت نفسه $x \neq 7$. ولنفس السبب يكون كل من 12, 13, 15, 18 عناصراً أعظمياً في A بالنسبة للعلاقة R_3 .

$$X = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

$$E = \{\{1, 3\}, \{5, 7\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, X\}$$

ولتكن كل من R_1, R_2 علاقة معرفة على المجموعة E كالآتي:

pdfMachine

A pdf writer that produces quality PDF files with ease!

Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.

Get yours now!

$$R_1 = \{(A, B) \in E \times E \mid A \subseteq B\}$$

$$R_2 = \{(A, B) \in E \times E \mid A \supseteq B\}$$

فان كلا من R_1, R_2 علاقة ترتيب جزئي على E حيث تعتبر X عنصرا اعظما في المجموعة E بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لانه لا يوجد عنصر B في المجموعة E بحيث يكون

$X \subseteq B \wedge B \neq X$ والسبب نفسه تكون المجموعة $\{1, 3\}, \{7, 5\}$ عنصرا اعظما بالنسبة للعلاقة R_2 .

ملاحظة: كل عنصر اكبر هو عنصر كبير ولكن العكس غير صحيح .

تعريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر n في المجموعة A عنصرا أصغريا (minimal element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث

$$x R n \wedge x \neq n$$

امثلة:

$$A = \{3, 5, 9\} \text{ - لتكن}$$

ولتكن كل من R_1, R_2, R_3 علاقة معرفة على A كالآتي:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \geq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \text{ accept divided on } x\}$$

فتكون كل من R_1, R_2, R_3 علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 3 عنصرا أصغريا في A بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A بحيث

$$x \leq 3 \wedge x \neq 3$$

وان العدد 9 عنصرا أصغريا في A بالنسبة للعلاقة R_2 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A بحيث

$$x \geq 9 \wedge x \neq 9$$

كذلك يكون العدد 3 عنصرا أصغريا في A بالنسبة للعلاقة R_3 وذلك لانه لا يوجد عنصر x في A بحيث 3 يقبل القسمة على x وفي الوقت نفسه $x \neq 3$. ولنفس السبب يكون العدد 5 عنصرا أصغريا في A بالنسبة للعلاقة R_3 .

$$X = \{a, b, c, d\}, \text{ لتكن}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, X\}$$

ولتكن كل من R_1, R_2 علاقة معرفة على المجموعة E كالآتي:

$$R_1 = \{(A, B) \in E \times E \mid A \subseteq B\}$$

$$R_2 = \{(A, B) \in E \times E \mid A \supseteq B\}$$

pdfMachine

A pdf writer that produces quality PDF files with ease!

Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.

Get yours now!

فان كلا من R_1, R_2 علاقة ترتيب جزئي على E حيث تعتبر $\{a, b\}$ عنصرا اصغري في المجموعة E بالنسبة للعلاقة R_1 وذلك لانه لا يوجد عنصر A في المجموعة E بحيث يكون $A \subseteq \{a, b\} \wedge A \neq \{a, b\}$ والسبب نفسه تكون المجموعة و $\{b, d\}$ عنصرا اصغريا بالنسبة للعلاقة R_1