صفوف التكافو:(equivalence classes)

تعريف:لتكن R علاقة تكافو على مجموعة غير خالية A , وليكن a عنصرا ما في A تسمى المجموعة التي عناصرها جميع العناصر في A والتي ترتبط مع العنصر a بالعلاقة A بصف التكافو المحتوي a , ويرمز لها بالرمز [a] او A_a , أي أن

$$[a]=\{x\in A|(x,a)\in R\}$$

امثلة:

لتكن $A=\{1,2,3,4\}$

وان R علاقة معرفة على A كالاتي:

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$$

ويمكن بسهولة اثبات أن R علاقة تكافو على A واما صفوف التكافو فهي:

$$[1]=\{x\in A|(x,1)\in R\}=\{1,3\}$$

$$[2]=\{x\in A|(x,2)\in R\}=\{2\}$$

$$[3]=\{x\in A|(x,3)\in R\}=\{3,1\}$$

$$[4]=\{x\in A|(x,4)\in R\}=\{4\}$$

وبما ان $[1]=[3]$

فاذن صفوف التكافو هي $[1],[2],[4]$

خواص صفوف التكافو: (properties of equivalence classes)

المبرهنة التالية توضح اهم خواص صفوف التكافو

مبرهنة: لتكن R علاقة تكافو على مجموعة غير خالية A وليكن a,b أي عنصرين في المجموعة A

أ- $a\in[a]$

ب- اذا كان $b\in[a]$ فان $[a]=[b]$

ت- $[a]=[b]$ اذا وفقط اذا كان $(a,b)\in R$

ث- اذا كان $[a]\sqcap[b]\neq\emptyset$ فان $[a]=[b]$

البرهان:

أ- من تعريف صفوف التكافو

$$[a]=\{x\in A|(x,a)\in R\}\ldots.(1)$$

بما أن R علاقة انعكاسية , اذن

$\forall a\in A ,(a,a)\in R$........(2)

من (1),(2) نستنتج بان $a\in[a]$

ب- نفرض أن $b\in[a]$, ولكي نبرهن على $[a]=[b]$

نفرض أن $x\in[b]$

اذن من تعريف صف التكافو ينتج

$(x,b)\in R$

وبما أن

$b\in[a]$

ينتج من تعريف صف التكافو أن

$(b,a)\in R$

بما أن R علاقة متعدية , فاذن

$(x,b)\in R \wedge (b,a)\in R \rightarrow (x,a)\in R$

ومن تعريف صف التكافو نجد

$(x,a)\in R\rightarrow x\in[a]$

اذن

$[b]\sqsubseteq[a]$.........(1)

ولبرهان أن

$[a]\sqsubseteq[b]$

نفرض أن $y\in[a]$

$y\in[a]\rightarrow(y,a)\in R$

ايضا

$b\in[a]\rightarrow(b,a)\in R$

وبما أن R علاقة متناظرة , اذن $(a,b)\in R$

وبما أن R علاقة متعدية , اذن

$(y,a)\in R \wedge(a,b)\in R\rightarrow(y,b)\in R$

أي أن , $y\in[b]$

وعليه يكون

$[a]\sqsubseteq[b]$.......(2)

من (1),(2) نستنتج بان $[a]=[b]$

ت- نفرض أن $[a]=[b]$

باستخدام الخاصية (أ)($a\in[a]$) نجد أن $a\in[b]$, ومن تعريف صف التكافو ينتج

$a\in[b]\rightarrow(a,b)\in R$

وبصورة معاكسة , نفرض أن

$(a,b)\in R$

ولبرهان على أن $[a]=[b]$

نفرض أن $x\in[a]$

اذن من تعريف صف التكافو:

$x\in[a]\to(x,a)\in R$

وبما أن R علاقة متعدية, اذن

$(x,a)\in R \wedge (a,b)\in R\to(x,b)\in R$

أي أن $x\in[b]$

اذن

$[a]\sqsubseteq[b]\ldots\ldots\ldots(1)$

وبالمثل نفرض أن $y\in[b]$, ومن تعريف صف التكافو

$y\in[b]\to(y,b)\in R$

وبما أن R علاقة متناظرة

$(a,b)\in R\to(b,a)\in R$

وبما أن R علاقة متعدية , اذن

$(y,b)\in R \wedge (b,a)\in R\to(y,a)\in R$

أي أن

$y\in[a]\ldots\ldots.(2)$

من (1),(2) نستنتج بان $[a]=[b]$

ث-نفرض أن $[a]\sqcap[b]\neq\emptyset$

ونفرض أن $x\in [a]\sqcap[b]$

اذن

$x\in [a]\sqcap[b]\to x\in[a]\wedge x\in[b]$

$\rightarrow(x,a)\in R \wedge (x,b)\in R$

$\rightarrow(x,b)\in R \wedge (x,a)\in R$

وبما أن R علاقة متناظرة , اذن

$(b,x)\in R \wedge (x,a)\in R$

وبما أن R علاقة متعدية , اذن

$(b,x)\in R \wedge (x,a)\in R \rightarrow (b,a)\in R$

وبما أن R علاقة متناظرة , اذن

$(a,b)\in R$

ومن الخاصية (ت) نجد أن

$(a,b)\in R \rightarrow [a]=[b]$

التجزئة:(partition)

تعريف :لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جملة من مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة A , فان

$\{A_i\}_{i\in I}$ تسمى تجزئة للمجموع A اذا حققت الشروط التالية :

1- $\forall\ i,j\in I, A_i \sqcap A_j=\emptyset \wedge A_i\neq A_j$

2- $A= \bigcup_{i\in I} A_i$

مثال:لتكن A مجموعة الاعداد الصحيحة

وان X مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية

Y مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية

فنلاحظ بان كلا من X,Y مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة A , وان

$X\sqcap Y=\emptyset$

وأيضا

$X\cup Y=A$

وعليه فالمجموعة $\{X,Y\}$ تجزئة للمجموعة A .

مجموعة القسمة:(Quotient set)

تعريف: لتكن R علاقة تكافو على مجموعة غير خالية A فان مجموعة جميع صفوف التكافو بالنسبة للعلاقة R تسمى مجموعة القسمة .

امثلة:

١- لتكن $A=\{1,2,3,4\}$

وان R علاقة معرفة على A كالاتي:

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$$

ويمكن بسهولة اثبات أن R علاقة تكافو على A واما صفوف التكافو فهي:

$$[1]=\{x\in A|(x,1)\in R\}=\{1,3\}$$

$$[2]=\{x\in A|(x,2)\in R\}=\{2\}$$

$$[3]=\{x\in A|(x,3)\in R\}=\{3,1\}$$

$$[4]=\{x\in A|(x,4)\in R\}=\{4\}$$

وبما ان $[1]=[3]$

فان مجموعة القسمة : $A/R=\{[1],[2],[4]\}$

٢-لتكن $A=\{1,3,5,7,9\}$

وان كلا من R,S علاقة معرفة على A كالاتي

$$R=I_A\cup\{(1,3),(3,1),(5,7),(7,5)\}$$

$$S=I_A\cup\{(1,3),(3,1),(5,7),(5,9),(9,5),(7,9),(9,7),(7,5)\}$$

ويمكن بسهولة اثبات أن R,S علاقة تكافو على A حيث:

$$A/R=\{[1],[5],[9]\}$$

$$A/S=\{[1],[5]\}$$