مبرهنة :-

يكون التطبيق $f:A\to B$ قابل للعكس اذا وفقط اذا كان $f: A\to B$ تقابلاً .

ملاحظة :- تعطى هذه المبرهنة الشرط الكافي والضروب الى التطبيق لكي يكون قابلاً للعكس .

البرهان :-

نفرض ان $f:A\to B$ قابلا للعكس

اذن $f^{-1}:B\to A$ يكون تطبيقا .

لكي يكون $f:A\to B$ تقابلاً فيجب ان نبرهن على انة تطبيق متباين وشامل .

سنبرهن اولاً على انه تطبيق متباين لذا نفرض ان x_1,x عنصران في A حيث ان $f(x)=f(x_1)$

نفرض ان $f(x)=f(x_1)=y$

اذن $(x,y)\in f \wedge (x_1,y)\in f$

ون تعريف العلاقة العكسية يكون

$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y,x_1)\in f^{-1}$

وبما ان f^{-1} علاقة تابعية .

فاذن

$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y,x_1)\in f^{-1} \to x=x_1$

اذن يكون $f:A\to B$ تطبيقا متبايناً .

الان سنبرهن $f:A\to B$ تطبيق شامل .

نفرض ان $y\in B$ وبما أن $f^{-1}: B\to A$ تطبيقاً

اذن $\exists x\in A \ni (y,x) \in f^{-1}$

اي انه $\exists x \in A \ni (x,y) \in f$

وبعبارة اخرى $\exists x \in A \ni y = f(x)$

وعليه يكون التطبيق $f:A\to B$ تطبيقاً شاملاً

وبصورة معاكسة نفرض ان $f:A\to B$ تقابلا

سنبرهن على أن التطبيق $f:A\to B$ قابلاً للعكس

pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!
"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA

اي يجب ان نبرهن على أن $f^{-1}: B \to A$ يكون تطبيقاً

١ – نفرض $y \in B$

بما ان $f: A \to B$ تطبيق شامل

اذن $\exists x \in A \ni f(x) = y$

أي ان $\exists x \in A \ni (x, y) \in f$

و لكن $(x, y) \in f \to (y, x) \in f^{-1}$

اذن $\exists x \in A \ni (y, x) \in f^{-1}$

أي ان $domf^{-1} = B$

٢ – لكي نبرهن على ان $f^{-1}: B \to A$ علاقة تابعية نفرض ان

أي ان $f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$

و عليه يكون $f(x_1) = f(x_2)$

و بما ان $f: A \to B$ تطبيق متباين اذن $x_1 = x_2$

أي ان

اذن f^{-1} يكون علاقة دالية

و عليه يكون $f^{-1}: A \to B$ تطبيقا .

مبرهنة :-

اذا كان $f: A \to B$ تطبيقا قابلا للعكس فان $f^{-1}: B \to A$ يكون تقابلا .

البرهان :- $f: A \to B$ تطبيقا قابلا للعكس

فمن التعريف $f^{-1}: B \to A$ يكون تطبيقا

سنبرهن الان على ان $f^{-1}: B \to A$ تقابل .

١- نفرض ان كلا من

pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!
"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA

اذن

و من تعريف العلاقة النظيرة ينتج ان

أي ان $y = f(x) \wedge y_1 = f(x)$

اذن

اذن فالتطبيق $f^{-1}: B \to A$ متباين .

٢- نفرض ان $x \in A$

بما ان $f: A \to B$ تطبيق

و من تعريف العلاقة النظيرة نستنتج ان

أي انه $\exists y \in B \ni (y, x) \in f^{-1}$

و بعبارة اخرى

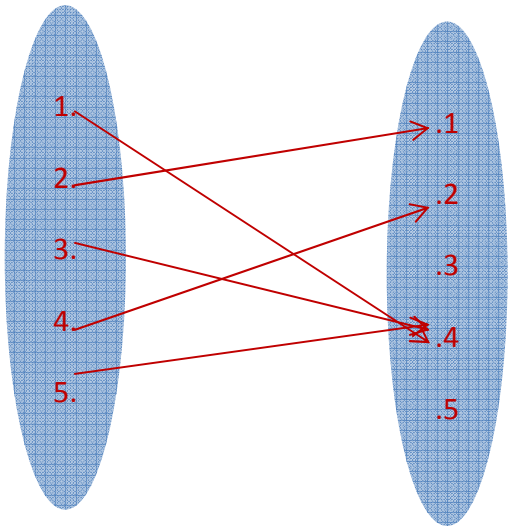
اذن يكون التطبيق $f^{-1}: B \to A$ شاملا .

امثلة:-

١ – لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$

و لتكن $f: A \to A$ معرفة حسب المخطط التالي

pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!
"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA



اوجد ان

١ - $f^{-1}(2)$

٢ - $f^{-1}(3)$

٣ – $f^{-1}\{1,2\}$

٤ – $f^{-1}\{2,3,4\}$

الحل :-

1 – $f^{-1}(2)$ صور العناصرالتي تكون صورتة هي 2 . اذن فقط العنصر 4 التي تكون صورتها 2 اي ان

$f^{-1}(2)=\{4\}$

2 - $f^{-1}(3)=\emptyset$ وذلك لان العنصر 3 لايمثل صورة انه عنصر .

3 - $f^{-1}\{1,2\}$ تمثل $f^{-1}\{1,2\} = \{2,4\}$

4- $f^{-1}\{2,3,4\}=\{4,1,3,5\}$

٢ - لتكن التطبيق $f:R\to R$ معرف كالاتي $f(x)=x^2$. اوجد

$f^{-1}(25), f^{-1}(-9), f^{-1}([-1,1]) f^{-1}([4,25])$

الحل:-

$f^{-1}(25)=\{5,-5\}$

$f^{-1}(-9)=\emptyset$ لانه لا يوجد عدد حقيقي مربعة يساوي -9

pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!
"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA

$f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$ لان $|x| \leq 1$ تودي $|x^2| \leq 1$ اي ان اذا كان x محتوى في $[-1,1]$ اذن $f(x) = x^2$ ايضا محتوى في $[-1,1]$

f^{-1}

2- لتكن $A = [-1,1]$ التطبيقات f_1 , f_2 , f_3 هي تطبيقات معرفة من A الى A كالاتي

بين أي من هذه التطبيقات لها تطبيق نظير .

١ – f_1 هو تطبيق ليس متباين و لا شامل . اذن ليس لها معكوس .

٢ – f_2 هو تطبيق متباين لان $x \neq y$ يؤدي و ايظا هي تطبيق شامل اذن f_2 لها تطبيق نظير

٣ – f_3 هو تطبيق متباين لكن ليس شامل . اذن f_3 ليس لها نظير .

4 – لتكن $f:R\rightarrow R$ معرفة كالاتي $f(x)=2x-3$ اوجد صيغة نظير التطبيق

الحل:

نلاحظ بان $f:R\rightarrow R$ هو تطبيق متباين وشامل

لتكن

$$y=f(x)=2x-3$$

$$x=f^{-1}(y)$$

$$x=\frac{y+3}{2}$$

اذن

$$f^{-1}(y)=x=\frac{y+3}{2}$$

pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!
"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA