التطبيق التقابلي (Bijective mapping)

تعريف :- يسمى التطبيق $f: A \to B$ تقابلاً او تقادرا اذا و فقط اذا كان تطبيقا شاملا ومتباينا .

امثلة :- لتكن

$$A = \{1,3,5,7, \dots \dots \dots\}$$

$$B = \{2,4,6,8, \dots \dots \dots\}$$

و لتكن كل من f و g علاقة من A الى B معرفة كالاتي

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$g = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$$

لاحظ ان $f: A \to B$ لا يكون تقابلا و ذلك لانه ليس تطبيقا شاملا ، فمثلا اذا اخذنا y = 4 فلا يوجد عنصر x في A بحيث يكون f(x)= 4 اما التطبيق $g: A \to B$ فهو متقابلا و ذلك لانه تطبيق شامل متباين .

١- لتكن A = R
B = R
و ان $f: A \to B$ معرفة على النحو الاتي

$$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x^3 - 7\}$$

فان التطبيق $f: R \to R$ يكون تقابلا و ذلك لان $f: R \to R$ تطبيق شامل و متباين

تساوي التطبيقات (Equality of mapping) :

تعريف :-ليكن كل من $f: A \to B$

$g: A_1 \to B_1$

تطبيقا فان التطبيقين يكونان متساويين اذا و فقط اذا كان

أ- $A = A_1$
ب- $B = B_1$
ت- $f = g$

مثال :-ليكن كل من f , g علاقة معرفة على R كالاتي :-

$$f = \{(x,y) \in R \times R | \; y = |x|\}$$

$$g=\{(x,y)\in R\times R \mid y=\sqrt{x^2}\}$$

فان كلا من $f: R \to R$ و $g: R \to R$ تطبيق بما ان f=g فيكون التطبيقين متساويين

مثال :- لتكن الدوال (التطبيقات) معرفة على النحو الاتي

$$a - f(x) = x^2 \quad where \quad 0 \le x \le 1$$
$$b - g(y) = y^2 \quad where \quad 2 \le y \le 8$$
$$c - h(z) = z^2 \quad where \quad z \in R$$

نلاحظ انه لا يوجد تطبيق متساوي

و ذلك لانه لا توجد دالتين متساويتين

لان كل من المجالات مختلفة (المنطلق) لذلك فالدوال (التطبيقات) مختلفة

انواع التطبيقات (Types of mapping)

١- **التطبيق الذاتي :(identity mapping)**

تعريف :-يسمى التطبيق $f: A \to A$ بالتطبيق الذاتي على A اذا و فقط اذا كان

$f(x) = x \,,\ \forall x \in A$

و عادة يستخدم الرمز I_A للدلالة الى التطبيق الذاتي على المجموعة A.

مثال :- لتكن $A = \{1,3,5\}$

$f = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

اذن $f: A \to A$ يكون تطبيق ذاتي

ملاحظة :- التطبيق الذاتي I_A هو تطبيق متباين و شامل لذا فهو تقابلي

٢- **التطبيق الثابت :(constant mapping)**

تعريف :- يسمى التطبيق $f: A \to B$ بالتطبيق الثابت اذا و فقط اذا وجد عنصر $b \in B$ بحيث لكل $x \in A$ يكون

$$f(x) = b$$

مثال:-لتكن A = B =R

و ان f علاقة على R معرفة كالاتي

$$f = \{(x,y) \in R \times R | \, y = 2\}$$

$$f(x) = 2 \; \forall \, x \in R$$

فان $f : R \to R$ تطبيق ثابت .

٣- تطبيق الاحتواء: (inclusion mapping)

تعريف :-لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة B فيسمى التطبيق $f : A \to B$ بتطبيق الاحتواء اذا و فقط اذا كان

$$f(x) = x \; \forall \, x \in A$$

مثال :-لتكن B=Z, A=N

١- لتكن $f : N \to Z$ معرفة كالاتي

$$f = \{(x,y) \in N \times Z | \, y = x\}$$

بما ان $N \subseteq Z$ و ان

$$f(x) = x \; \forall x \in N$$

فان $f : N \to Z$ تطبيق احتوائي .

٢- لتكن $A = \{x \in R | \, -2 \le x \le 2\}$ ، B = R

و لتكن f علاقة من A الى B معرفة كالاتي :

$$f = \{(x,y) \in A \times B | \, y = x\}$$

و ان $f(x) = x$

فان $f : A \to B$ تطبيق احتواء

٤- التطبيق المميز لمجموعة: (Characteristic mapping)

لتكن B مجموعة جزيئية من المجموعة A و لتكن $c = \{0,1\}$ و ان f علاقة من A الى c بحيث :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \in A - B \end{cases}$$

فيسمى التطبيق $f: A \to C$ بالتطبيق المميز الى B في A .

مثال: لتكن $A = N$ ، B = {2,3,4,5},C={0,1}

و لتكن *f* علاقة من *A* الى *C* معرفة كالاتي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \in A - B \end{cases}$$

فان $f: A \to C$ تطبيق مميز الى B في A .

٥– مقصور تطبيق: (Restriction OF mapping)

ليكن $f: A \to B$ تطبيقا و لتكن C مجموعة جزئية من A فالتطبيق $g: C \to B$ المعرفة بحيث

$$g(x) = f(x) \forall x \in C$$

يسمى بمقصور f على c و سيرمز له بالرمز (f|c,c,B) أي ان $g = f/c$

مثال :- لتكن f علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R كالاتي :

$$f: R \to R$$

$$f = \{(x, y) \in R \times R | f(x) = x^2\}$$

و لتكن

$$g: N \to R$$

$$g = \{(x, y) \in N \times R | g(x) = x^2\}$$

بما ان $N \sqsubseteq R$

$$f(x) = g(x) \forall x \in N$$

اذن التطبيق $g: N \to R$ هو مقصور f على N .

٦- تمديد تطبيق: (**Extension of mapping**)

ليكن $f: A \to B$ تطبيق و ليكن $A \subseteq D$ فان التطبيق $g: D \to B$ يسمى بتمديد f من A الى D اذا حقق الشرط التالي :

$$g(x) = f(x) \forall x \in A$$

اي ان $g/A = f$

مثال :- في المثال السابق التطبيق $f: N \to R$ هو تمديد التطبيق $g: R \to R$ على R.

المتتالية: (**Sequence**)

تعريف :- لتكن A مجموعة ما لتطبيق $f: N \to A$ يسمى متتالية في A(Sequence in A)

و يرمز لها بالرمز $\{f_n\}$ او $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots$

حيث $f_n = f_{(n)}\ , n \in N$

ملاحظة :- اذا كانت $A = R$ فتسمى المتتالية بمتتالية من الاعداد الحقيقية

(Sequence of real number)

مثال :- كل من $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \{(-1)^n\}$ متتالية حقيقية .