بيان التطبيق: **(Graph of the mapping)**

تعريف :ـ ليكن $f: A \to B$ تطبيقا من المجموعة A الى المجموعة B فان المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x ,y) في $A \times B$ تسمى بيان التطبيق و اذا رمزنا لبيان التطبيق بالرمز G فان :

$$G = \{(x, y) \in A \times B | y = f(x)\}$$

مثال :ـ ليكن $f: R \to R$ تطبيقا معرف بحيث

$$f(x) = x^2$$

فيكون بيان التطبيق

$$f = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2\}$$

$$G = \{(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), \dots \dots \dots\}$$

مثال :ـ لتكن

$$A = \{1,3,4,5\}$$

$$B = \{3,7,9,11,13,15\}$$

و ليكن $: A \to B$ تطبيقا معرف بحيث

$$f(x) = 2x + 1$$

فيكون بيان التطبيق *f*

$$G = \{(x, y) \in A \times B | y = 2x + 1\}$$

$$= \{(1,3), (3,7), (4,9), (5,11)\}$$

ترميز :ـ لتكن كل من *B*, *A* مجموعة يرمز للمجموعة التي عناصرها جميع التطبيقات من *A* الى *B* بالرمز B^A .

مبرهنة :- اذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر و ان المجموعة B تحتوي على n من العناصر فان المجموعة B^A تحتوي على n^m من العناصر .

البرهان:- نفرض ان

$$A = \{x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_m\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots \dots \dots, y_n\}$$

لاحظ ان العنصر x_1 ممكن ان يرتبط باي عنصر من عناصر B و بما ان

$$n(B) = n$$

(عدد عناصر المجموعة B). اذن العنصر x_1 ممكن ان يرتبط باي عنصر من عناصر B بطرق عددهاn و كذلك العنصر x_2 ممكن ان يرتبط باي عنصر من عناصر B بطرق عددها n ايضا . فاذن عدد الطرق التي يمكن بواسطتها ارتباط عناصر A مع عناصر المجموعة B هي :

$$n.n.n \dots \dots \dots n = n^m$$

m- من المرات

التطبيق الشامل:(surjective mapping)

تعريف :-يسمى التطبيق $f: A \to B$ تطبيقا شاملا (surjective) او (onto) اذا و فقط اذا كان :

$$ran\, f = B$$

و بعبارة اخرى

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \ni y = f(x)$$

مثال :- لتكن A=R , B=R

وان

$$f = \{(x, y) |\, y = 5x + 1\}$$

فان التطبيق $f: A \to B$ يكون شاملا .

البرهان:- نفرض ان $y\in B$.

بما ان $y=5x+1$

$x\in A$ حيث $x=\frac{y-1}{5}$

اذن

$$f(x)=5x+1$$
$$=5\left(\frac{y-1}{5}\right)+1$$
$$=y$$

اذن $\forall y\in B,\exists\, x\in A\ni y=f(x)$ أي ان التطبيق $f:A\to B$ شاملا لاحظ ايضاان

$ran\, f=R$

٢-لتكن $A=\{x\in R|\, x\geq 0\}$

$B=R$

و ان

$f=\{(x,y)|\, y=x^2+1\}$

فيكون (f , A , B) التطبيق غير شامل و ذلك لان

اي ان $ran\, f=y\in B|\, y\geq 1$

$ran\, f\neq R$

٣- لتكن $A=[-1,1]$

$f:A\to A$

$g:A\to A$

$h:A\to A$

معرفات على النحو الاتي

(1) - $f(x)=x^2$
(2) - $g(x)=x^3$

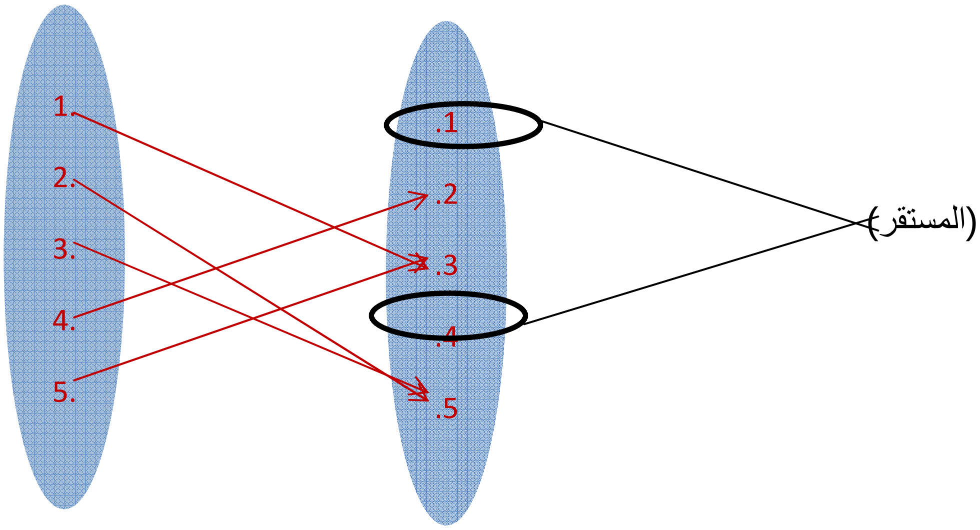
(3) - $h(x) = \sin x$

اذن f ليس تطبيق شامل و ذلك لان الاعداد السالبة $(-1 \le x \le 0)$ لا تظهر في مجال f أي ان $(ran\, f \ \ne A)y \ge 0$

٢- g تطبيق شامل و ذلك لان $g(A) = A$.

٣- h ليس تطبيق شامل و ذلك لانه في الحقيقة لا يوجد عدد x في A بحيث ان $\sin x = 1$.

٤ – لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$ معرفة التطبيق $f: A \to A$ على النحو التالي



نلاحظ بان الاعداد 1 , 4 في المجال المقابل (المستقر) (co-domain) هي لا تمثل صورة أي عنصر في المجال (domain) او بمعنى اخر

$f(A) = \{2,3,5\}$

هي المجموعة الجزئية الفعلية في A .

لذلك f ليست تطبيق شامل .

التطبيق المتباين (injective map)

تعريف:- يسمى التطبيق $f: A \to B$ تطبيقا متباينا (injective) (one to one)

اذا حقق الشرط التالي :

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$x_1 , x_2 \in A$ حيث

أو

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أي ان *العناصر* المختلفة في المنطلق يجب ان تكون صورها مختلفة في المستقر

امثلة:-

١- لتكن $A = \{x \in R | -2 \leq x \leq 5\}$
B = R

و لتكن كل f , g علاقة معرفة من A الى B كالاتي

$$f = \{(x,y) \in A \times B | y = x^3\}$$

$$g = \{(x,y) \in A \times B | y = 3x^2 + 1\}$$

فان $f: A \rightarrow B$ تطبيق متباين ، وذلك لان

اذا فرضنا $f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

و عليه فيكون التطبيق $f: A \rightarrow B$ متباين (لكن لو كان $y = x^2$ فان التطبيق يكون غير متباين)

بينما التطبيق $g: A \rightarrow B$ لا يكون التطبيق متباين

لانه لو وجدنا $x_1 = -2 , x_2 = 2$

فان :

$$g(x_1) = g(-2) = 13$$

$$g(x_1) = g(2) = 13$$

أي ان يوجد عنصرين مختلفين $x_1, x_2 \in A$

بحيث $x_1 \neq x_2$ و لكن $g(x_1) = g(x_2)$

فاذن $g: A \rightarrow B$ لا يكون تطبيق متباين .

٢ – لتكن

$A = [-1,1)$

$B = [1,3]$

$C = [-3,-1]$

و لتكن التطبيقات

$f_1 : A \to R$

$f_2 : B \to R$

$f_3 : C \to R$

معرفات على النحو الاتي

$$f_1 = \{(x,y) | \, y = x^2\}$$
$$f_2 = \{(x,y) | \, y = x^2\}$$

$$f_3 = \{(x,y) | \, y = x^2\}$$

اذن :-

١- التطبيق $f_1 : A \to R$ تطبيق ليس متباين لان

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = f_1\left(\frac{-1}{2}\right)$$

٢- التطبيق $f_2 : B \to R$ تطبيق متباين

و ذلك لان مربع عددين مختلفين موجبين ينتج صورتين مختلفتين

٣- التطبيق $f_3 : C \to R$ تطبيق متباين

و ذلك لان مربع عددين مختلفين سالبين ينتج صورتين مختلفتين.