المتغيرات العشوائية

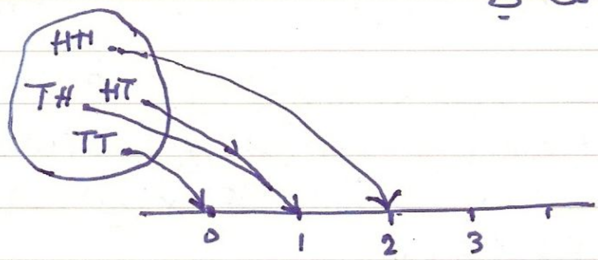
تعريف: اذا كان S هو فضاء تجربة عشوائية، فأن المتغير العشوائي (
ويرمز له .r.v هو دالة تشير لكل عنصر $w \in S$ كرقم حقيقي
$X_{(w)}$ في المجموعة E.

مثال ذلك تجربة رمي قطعتي نقود. فاذا فرضنا بأن X يمثل عدد مرات
ظهور الوجه. فأن X متغير عشوائي يأخذ احدى القيم 0,1,2. نجد

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

لذلك $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$, $X(TT) = 0$

كما موضح في الشكل التالي



ولان قيمة المتغير العشوائي تحدد بنتائج التجربة، فيمكن ان نشير
لاحتمالات للقيم المختلفة للمتغير العشوائي. بالنسبة للمثال اعلاه

$$P(X=2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(HT, TH) = \frac{1}{2} \qquad P(X=0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

ونجد بأن $\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = 1$

ملاحظة:-

اذا كان x قيمة حقيقية فأن مجموعة كل قيم $w \in S$ بحيث $X_{(w)} = x$
يرمز له $\{X = x\}$ لذا

$$P(X=x) = P\{w : X_{(w)} = x\}$$

وباختصار اذا كانت a, b تنتمي الى R فأن

① $P(X \leq a) = P\{w : X_{(w)} \leq a\}$

② $P(a \leq X \leq b) = P\{w : a \leq X_{(w)} \leq b\}$

مثال: رمي زهري نرد اعتياديان. افرض X متغير عشوائي يؤشر مجموع
الرقمين الظاهرين لذلك فأن X يأخذ القيم التالية مع احتمالاتها

$X = x$:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

تعريف : يسمى المتغير العشوائي X متقطعاً اذا كانت المجموعة E هي محدودة او معدودة غير محدودة . اما اذا كانت المجموعة E هي مجموعة الاعداد الطبيعية R او اي مجموعة جزئية من R فان X يسمى مستمراً .

في المثال السابق X متغير عشوائي متقطعاً

ملاحظة : اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على نفس المجموعة فان $X+Y$ ، XY ، $\frac{X}{Y}$ ، aX ، $aX+bY$ ، $\min(X,Y)$ ، $\max(X,Y)$ جميعها متغيرات عشوائية حيث a,b تنتمي الى R .

دالة التوزيع : اذا كان لدينا متغير عشوائي مثل X على فضاء العينة S فان دالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) او اختصاراً دالة التوزيع F للمتغير العشوائي X هي دالة من R الى $[0,1]$ وتعرف لكل $b \in R$

$$F(b) = P\{X \leq b\}$$

بعبارة اخرى $F(b)$ تعني احتمال ان المتغير العشوائي X يأخذ القيم التي هي اقل او تساوي b . بعض خواص دالة التوزيع

① F هي دالة غير تنازلية اي $F(a) \leq F(b)$ اذا كانت $a<b$

② $F(\infty) = \lim_{b \to \infty} F(b) = 1 \;,\; F(-\infty) = \lim_{b \to -\infty} F(b) = 0$

③ F مستمرة من اليمين اي $F(b) = \lim_{h \to 0} F(b+h)$ لكل $h>0$

ان لكل متغير عشوائي X دالة توزيع واحدة فقط . اذا عرفت فان كل الاحتمالات حول X يمكن ايجادها بدلالة F . مثلاً

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad , \quad a<b$$

$$P(X > b) = 1 - F(b) \qquad b \in R$$

اما بالنسبة الى $P(X<b)$ فنطبق خاصية الاستمرارية لايجاد

$$P(X<b) = P\left(\lim_{n \to \infty} \{X \leq b - \tfrac{1}{n}\}\right)$$

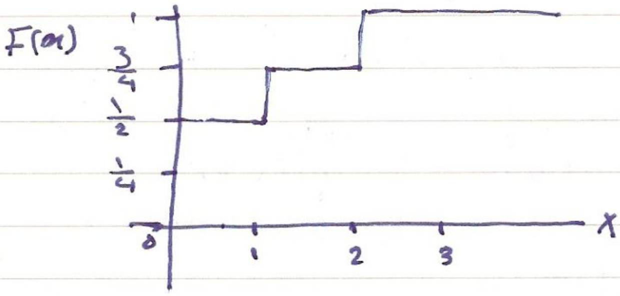
$$= \lim_{n \to \infty} P\{X \leq b - \tfrac{1}{n}\} = \lim_{n \to \infty} F(b - \tfrac{1}{n})$$

وليس من الضروري ان $P(X<b)$ تساوي $F(b)$ لان $F(b)$ تعني $P(X=b)$.

مثال : اذا كانت دالة التوزيع للمتغير X هي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

فان رسم $F(x)$ هو



ويمكن احتساب الاحتمالات التالية

$$P(X < 2) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \le 2 - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} F\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = F(1) - \lim F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P\left(X > \frac{3}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{3}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(0.5 < X \le 4) = F(4) - F(0.5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$