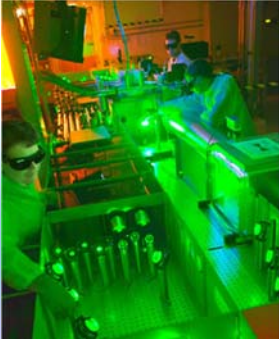



Physics Academy

Laser Physics

The Einstein Relation

Lecture 5






Dr. Hazem Falah Sakeek
www.hazemsakeek.com
www.physicsacademy.org

Physics Academy

The Einstein Relation

ذكرنا سابقاً أن العلم اينشتاين في عام 1917 وضع الأساس النظري لعمل الليزر من خلال دراسة تفاعل الطاقة الكهرومغناطيسية Electromagnetic Radiation مع المادة Matter وذلك من خلال العمليات الانتقالية الثلاثة التالية:



Absorption process

Spontaneous Emission

Stimulated Emission

افترض اينشتاين أن الذرات المكونة للمادة موزعة على مستويين للطاقة هما E_0 , E_1 حيث أن مستوى الطاقة E_0 يعرف باسم Ground State أما مستوى الطاقة E_1 فيعرف بـ Excited State. الانتقالات الثلاثة السابقة تحدث في المادة بين مستويي الطاقة عند أي درجة حرارة وهذا ما يعرف بالاتزان الحراري Thermal Equilibrium.

الشكل التالي يوضح مستويي الطاقة وتأثير كل عملية انتقال علي الذرة والإشعاع الكهرومغناطيسي.

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

2

Physics Academy

Einstein Coefficients معاملات اينشتين

Einstein Coefficients تعرف المعاملات A21 & B12 & B21 بمعاملات اينشتين وهي التي تعطينا فكرة جيدة عن احتمالية حدوث انتقال بين مستويات الطاقة.

سنقوم بإيجاد العلاقات التي تربط هذه المعاملات بعضها ببعض حيث أن الانتقالات الثلاثة تحدث في المادة بصورة مستمرة وبمعدل ثابت لكل منها عند ثبوت درجة الحرارة أي في حالة الاتزان الحراري. وبمعرفة معامل من المعاملات الثلاثة يمكن حساب المعاملات الأخرى.

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

3

Physics Academy

Population at thermal equilibrium

إن العلاقة بين تعداد الذرات في مستويات الطاقة عند الاتزان الحراري توصف بمعادلة ماكسويل-بولتزمان للتوزيع الإحصائي Maxwell- Boltzman Law

$$N_1 = \frac{g_1}{g_0} N_0 e^{-\frac{h \nu}{KT}}$$

Where T is the temperature in Kelvin and there is a thermal equilibrium at T, g is the statistical weight which represent the different ways of distribution of atoms all have the same energy (degeneracy).

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

4

Example:

Calculate the ratio of the population numbers (N1, N2) for the two energy levels E2 and E1 when the material is at room temperature (300°K), and the difference between the energy levels is 0.5 [eV]. What is the wavelength (λ) of a photon which will be emitted in the transition from E2 to E1? where $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Solution:

When substituting the numbers in the equation, we get:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B \cdot T}\right) = \exp\left[-\frac{(0.5 \cdot \text{eV}) \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{\text{J}}{\text{eV}}\right)}{\left(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot \frac{\text{J}}{\text{K}}\right) \cdot (300\text{K})}\right] = 4 \cdot 10^{-9}$$

This means that at room temperature, for every 1,000,000,000 atoms at the ground level (E1), there are 4 atoms in the excited state (E2) !!!

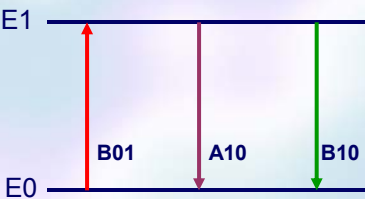
To calculate the **wavelength:**

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34} \cdot \text{J} \cdot \text{sec}) \cdot \left(3 \cdot 10^8 \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)}{(0.5 \cdot \text{eV}) \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{\text{J}}{\text{eV}}\right)} = 2.48 \cdot \mu\text{m}$$

This wavelength is in the Near Infra-Red (NIR) spectrum.

The Rate Equations for the Absorption, Spontaneous Emission and Stimulated Emission

سنقوم في هذه المرحلة بدراسة تأثير كل عملية من العمليات الانتقالية الثلاث على معدل تغير تعداد الذرات N_1 في مستوي الطاقة المثار E_1 وذلك في حالة الاتزان الحراري dN_1/dt ، لذا سنفترض مجموعة من الذرات موزعة على مستويين للطاقة E_0, E_1



الانبعاث التلقائي Spontaneous Emission

تعتمد عملية الانبعاث التلقائي على تعداد المستوي E_1 أي كلما ازداد N_1 كلما زادت عملية الانبعاث التلقائي، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل A_{10} الذي يعبر على احتمالية حدوث الانبعاث التلقائي. يكون معدل التغير في تعداد المستوي E_1 بالنسبة للزمن بالسالب لأن كلما زاد معدل التغير كلما نقصت N_1 ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:



$$dN_1/dt = - A_{10} N_1 \quad (1)$$

الامتصاص Stimulated Absorption

تعتمد عملية الامتصاص على تعداد المستوي E_0 أي كلما ازداد N_0 كلما زادت عملية الامتصاص، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل B_{01} الذي يعبر على احتمالية حدوث عملية الامتصاص. يكون معدل التغير في تعداد المستوى E_1 بالنسبة للزمن بالموجب لأن كلما زاد معدل التغير كلما زاد N_1 . وحيث أن عملية الامتصاص تحدث إذا توفر فوتون ذو طاقة تساوي فرق الطاقة بين المستويين E_1 و E_0 أي أن

$$\nu = (\Delta E) = E_2 - E_1$$

وللتعبير عن مدى تحقق المعادلة السابقة في عملية الامتصاص فإننا نعبر عنها بكثافة الإشعاع بالدالة ρ كمعدل التغير في التردد **Energy density of radiation** والتي تعطي مدى احتمالية وجود فوتونات عند تردد ν

ويمكن التعبير تأثير عملية الامتصاص على تغير تعداد المستوى E_1 بالمعادلة التالية:

$$dN_1/dt = + B_{01} N_0 \rho(\nu) \quad (2)$$

الانبعاث الاستحثاثي Stimulated Emission

تعتمد عملية الانبعاث الاستحثاثي على تعداد المستوي E_1 أي كلما ازداد N_1 كلما زادت عملية الانبعاث الاستحثاثي، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل B_{10} الذي يعبر على احتمالية حدوث عملية الانبعاث الاستحثاثي. يكون معدل التغير في تعداد المستوى E_1 بالنسبة للزمن بالسالب لأن كلما زاد معدل التغير كلما قل N_1 . وحيث أن عملية الانبعاث الاستحثاثي تحدث إذا توفر فوتون ذو طاقة تساوي فرق الطاقة بين المستويين E_1 و E_0 أي أن

$$\nu = (\Delta E) = E_2 - E_1$$

وللتعبير عن مدى تحقق المعادلة السابقة في عملية الانبعاث الاستحثاثي فإننا نعبر عنها بكثافة الإشعاع بالدالة ρ كمعدل التغير في التردد **Energy density of radiation** والتي تعطي مدى احتمالية وجود فوتونات عند تردد ν

ويمكن التعبير تأثير عملية الانبعاث الاستحثاثي على تغير تعداد المستوى E_1 بالمعادلة التالية:

$$dN_1/dt = - B_{10} N_1 \rho(\nu) \quad (3)$$

Physics Academy

المعادلات الثلاثة السابقة الذكر تمثل الحالات المختلفة التي يمكن من خلالها أن تتفاعل الإشعاع الكهرومغناطيسي مع ذرات المادة. وفي حالة الاتزان الحراري عند درجة حرارة T فإن عدد الذرات N_1 في مستوى الطاقة E_1 يكون ثابت أي أن

$N_1 = \text{Constant} \quad \& \quad dN_1/dt = \text{zero}$

Therefore

$$dN_1/dt = -A_{10} N_1 + B_{01} N_0 \rho(\nu) - B_{10} N_1 \rho(\nu) = 0$$

Hence

$$N_1 (-A_{10} - B_{10} \rho(\nu)) + B_{01} N_0 \rho(\nu) = 0$$
$$N_1 (A_{10} + B_{10} \rho(\nu)) = B_{01} N_0 \rho(\nu)$$

we get

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{B_{01} \rho(\nu)}{A_{10} + B_{10} \rho(\nu)} \quad (4)$$

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

11

Physics Academy

وحيث أن المعادلات الثلاثة الأخيرة تم اشتقاقها تحت شرط الاتزان الحراري ولهذا فإن معادلة ماكسويل بولتزمان متحققة

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} \quad (5) \qquad \frac{N_1}{N_0} = \frac{B_{01} \rho(\nu)}{A_{10} + B_{10} \rho(\nu)} \quad (4)$$

وبمقارنة المعادلة (4) بالمعادلة (5) نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} = \frac{B_{01} \rho(\nu)}{A_{10} + B_{10} \rho(\nu)} \quad (5)^*$$

عند درجات الحرارة العالية فإن كثافة الإشعاع تكون كبيرة وهنا يمكن إهمال تأثير عملية الانبعاث التلقائي حيث إنها لا تتأثر بتغير درجة الحرارة.

When $KT \gg h\nu$ we get $g_1/g_0 = N_1/N_0$ hence,

$$\frac{B_{01}}{B_{10}} = \frac{g_1}{g_0} \quad (6)$$

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

12

Physics Academy

From equation (5) we get

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} = \frac{B_{01} \rho(\nu)}{A_{10} + B_{10} \rho(\nu)}$$

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} A_{10} + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} B_{10} \rho(\nu) = \cancel{B_{01}} \rho(\nu)$$

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

13

Physics Academy

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{\rho(\nu) \left[1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}} \right]}{e^{-\frac{h\nu}{KT}}}$$

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \rho(\nu) (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)$$

$$\rho(\nu) = \frac{A_{10}}{B_{10}} \frac{1}{(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)} \tag{7}$$

Equation (7) called Einstein equation for black body radiation
From the Blank equation of black body radiation

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)} \tag{8}$$

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \tag{9}$$

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

14

Physics Academy

The equation (6) and (9) are called Einstein relations. The second relation enables us to evaluate the ratio of the rate of spontaneous emission to the rate of stimulated emission for a given pair of energy levels.

$$\frac{B_{01}}{B_{10}} = \frac{g_1}{g_0} \tag{6}$$

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \tag{9}$$

Einstein Coefficients معاملات اينشتين

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

15

Physics Academy

From equation (8)

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

To evaluate the ratio between the spontaneous emission and the stimulated emission

Let $R = \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)$

therefore

$$\rho(\nu) = \frac{A_{10}}{B_{10}} \frac{1}{R}$$

The ratio for the spontaneous emission to the stimulated emission can be written as

$$R = \frac{A_{10}}{B_{10}} \frac{1}{\rho(\nu)}$$

Dr. Hazem Falah Sakeek www.physicsacademy.org & www.hazemsakeek.com

16

Example

Calculate the ratio of spontaneous emission to stimulated emission for a tungsten filament operating at a temperature of 2000K taking the average frequency to be 5×10^{14} Hz.

Solution

The ratio $R = \exp[(6.6 \times 10^{-34} \times 4 \times 10^{14}) / (1.38 \times 10^{-23} \times 2000)]$

تم إهمال كثافة الإشعاع

$R = 1.5 \times 10^5$

This confirms that under normal condition of thermal equilibrium stimulated emission is not an important process.

مما سبق نستنتج أن عملية stimulated emission تنافس عمليتي spontaneous emission و absorption وحتى نكبر شعاع ضوئي بواسطة stimulated emission فإنه يجب أن نزيد معدل هذه العملية بالنسبة للعمليات الأخرتين. وحتى يتحقق ذلك فإنه يجب زيادة كثافة الإشعاع وتعداد المستويات E_1 وهذا ما يعرف بـ Population Inversion.