٢) توزيع بواسون

ان توزيع بواسون له استخدامات كثيرة والتي يظهر منها المعدل هو المعلمة التي تحدد طبيعة التوزيع. ويمكن ان ننظر اليه كغاية لحالة التوزيع ذي الحدين تحت الشروط التالية:

١- عدد المحاولات n كبير جداً

٢- احتمال النجاح لكل محاولة p صغير جداً بحيث $np = m$ محدود.

لذلك فان $p = \frac{m}{n}$ و $q = 1 - \frac{m}{n}$ حيث m رقم موجب حقيقي

وعلى ذلك يكون

$$P(X=k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n^k \cdot 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{k!\left(1-\frac{m}{n}\right)^k}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(m)^k\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{k!\left(1-\frac{m}{n}\right)^k}$$

When $n \to \infty$, k, m ثوابت

$$\therefore \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \longrightarrow 1$$

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^k \longrightarrow 1$$

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-m}$$

$$\therefore P(X=k) = \frac{e^{-m}\, m^k}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

اي متغير له دالة كثافة احتمالية السابقة، يقال بأن له توزيع بواسون بالمعلمة m وهي يمكن ان ينظر اليها المعدل المتوسط لحدوث الحادثة في وحدة الزمن (ربما تكون صفحة، ثانية، دقيقة، سم ...). من المعلوم ان المتسلسلة

$$1 + m + \frac{m^2}{2!} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{m^k}{k!}$$

هي متقاربة لجميع قيم m، الى e^m لهذا

$$\sum_{0}^{\infty} P(X=k) = \frac{\sum e^{-m}\, m^{k}}{k!} = 1$$

مثال :

اذا كان 3% من انتاج احد المصانع هو غير صالح وتم سحب عينه من الانتاج بحجم 100 بشكل عشوائي . فما هو احتمال بأنها تحتوي بالضبط على اثنين غير صالحين . استخدم توزيع ذي الحدين مره وتوزيع بواسون مره اخرى .

الحل : $n = 100 \qquad p = 0.03 \qquad q = 0.97$

ذي الحدين $P(X=2) = C^{100}_{2}\,(0.03)^{2}(0.97)^{98} = 0.2251$

بواسون . $m = 100(0.03) = 3$

$$P(X=2) = \frac{e^{-3}\,3^{2}}{2!} = 0.2240$$

مثال : بداله تتلقى مكالمتين كل دقيقة كمعدل . اوجد احتمال ان البداله تتلقى على الاقل 3 مكالمات .

$m = 2 \qquad P(X \geq 3) = 1 - P(X<3)$

$$P(X<3) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$

$$= \frac{e^{-2}\,2^{2}}{2!} + \frac{e^{-2}\,2}{1!} + \frac{e^{-2}\,2^{0}}{0!} = 0.6765$$

$$\therefore\ P(X \geq 3) = 1 - 0.6765 = 0.3235$$

مثال : اذا كان عدد الحوادث على الطريق السريع بين بغداد وبابل في الفتره من 9 صباحاً الى 10 صباحاً في احد الايام هو متغير عشوائي له توزيع بواسون بالمعلمه $m=0.5$ اوجد احتمال (1) وقوع اقل من 3 حوادث (2) وقوع بين 2 – 6 حوادث .

الحل :

(1) $P(X<3) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$

$$= \frac{e^{-.5}\cdot(0.5)^{2}}{2!} + \frac{e^{-0.5}\,(0.5)^{1}}{1!} + \frac{e^{-0.5}\,(0.5)^{0}}{0!}$$

$$= e^{-0.5}(1.625) = 0.986$$

(2) $$P(2 \leq X \leq 6) = \sum_{2}^{6} \frac{e^{-0.5}\,(0.5)^{k}}{k!} = e^{-0.5} \sum_{2}^{6} \frac{1}{2^{k}\,k!}$$

$$= 0.6065\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \frac{1}{46080}\right)$$

$$= 0.0885$$

④ التوزيع الهندسي :

اذا كان لدينا مجموعة من المحاولات المستقلة لكل منها احتمال p للنجاح استمرت بدون توقف لحين تحقيق اول نجاح فاذا كان X يشير الى عدد المحاولات فان

$$P(X=n)= pq^{n-1} \qquad n=1,2,\dots$$

فنقول ان المتغير X الذي له دالة الكتلة الاحتمالية السابقة توزيع هندسياً (باسكال) بالمعلمة p.

نحن نعلم بأن $1+q+q^2+\dots=\sum_{0}^{\infty} q^n$ يتقارب لكل $|q|<1$ الى $\frac{1}{1-q}$ لذلك نقول

$$\sum_{1}^{\infty} pq^{n-1} = \frac{p}{1-q} = 1$$

ملاحظة : اذا كان X يشير الى حالات الفشل التي تسبق اول نجاح فان

$$P(X=n) = pq^{n} \qquad n=0,1,2,\dots$$

مثال : صياد يطلق اطلاقات على الهدف وكان معدل اصابته للهدف هو $\frac{1}{3}$ فما هو احتمال ان يصيب الهدف بالاطلاقة الخامسة.

$$P(X=5)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{81}=\frac{16}{243}$$

⑤ التوزيع الهندسي الفوقي

عندما يتكون المجتمع من N من الاشياء (N محدودة) والتي تتضمن M من الاشياء تحمل الصفة A (من النوع الاول) والباقي تحمل الصفة B (من النوع الثاني) واخذت عينة منه بحجم n عشوائياً بدون اعادة . اذا كان X يمثل النوع الاول في العينة فان

$$P(X=k)=\frac{C^{m}_{k}\cdot C^{N-m}_{n-k}}{C^{N}_{n}} \qquad k=0,1,\dots,\min(m,n)$$

مثال : معرض لديه 20 مدفئة ، 8 منها عاطلة . سحبت عينة من 5 مدافئ . ماهو احتمال ان تتضمن ① مدفئة عاطلة ② على الاقل 4 عاطلة

① $P(X=1)=\frac{C^{8}_{1}\cdot C^{12}_{4}}{C^{20}_{5}}$

② $P(X\geq 4)=\frac{C^{8}_{4}\cdot C^{12}_{1}+C^{8}_{5}\cdot C^{12}_{0}}{C^{20}_{5}}$

٤ توزيع ذي الحدين السالب

اذا اوقفنا المحاولات عند تحقيق النجاح رقم k بدلاً من النجاح الاول في هذه الحاله نطبق توزيع ذي الحدين السالب. فاذا فرضنا بأن لدينا n من محاولات برنولي المستقله فأن احتمال الحصول على $(k-1)$ من النجاحات في $(n-1)$ محاوله هو

$$C_{k-1}^{n-1}\, p^{k-1}\, q^{n-k}$$

وبما كان احتمال الحصول على نجاح آخر في المحاوله n هو p. فيكون احتمال الحصول على النجاح k في المحاوله n هو

$$P(X=k) = C_{k-1}^{n-1}\, p^{k-1} q^{n-k} \cdot p$$

$$= C_{k-1}^{n-1}\, p^{k} q^{n-k} \qquad n = k, k+1, \ldots$$

مثال: افرض ان احتمال اصابه طفل بمرض معين هو 0.2 . ماهو احتمال من 12 طفل تم فحصهم ان يكون الطفل الثالث مصاب بالمرض.

الحل:

$$n=12 \quad k=3 \quad p=0.2 \quad q=0.8$$

$$\therefore P(X=3) = C_{2}^{11}\,(0.2)^{3}\,(0.8)^{9} = 0.059$$

تمارين ① افرض X متغير عشوائي له داله الكتله الاحتماليه

x:	-2	-1	0	2	3	5
$P(x)$:	C	$2C$	$3C$	$4C$	$3C$	$2C$

اوجد ① قيمه الثابت C ② $F(x)$ ③ $P(X>2)$ و $P(0<X<3)$

② افرض ان احتمال بأن طالب يدخل الكليه هو $\frac{2}{3}$. اوجد احتمال بأن من بين 10 طلاب اعداديه يتم قبول

١- 8 منهم يقبل ٢- على الاقل يقبل 5 طلاب

③ اذا كان احتمال ان يخطأ اللاعب الهدف هو $\frac{1}{6}$

١- اوجد احتمال اصابته للهدف 4 مرات اذا هدف 5 مرات

٢- = = عدم اصابته للهدف المره الاولى في الضربه الخامسه

٣- = = اصابته للهدف المره الثالثه في الضربه العاشره

(4) إذا كان احتمال أن لا يقع خطأ في طبع كتاب هو $e^{-2.5}$. ما هو احتمال أن الكتاب يتضمن أكثر من 2 خطأ في الصفحة.

(5) إذا كان عدد الأسماك التي يصطادها شخص في الساعة هي متغير عشوائي له توزيع بواسون بالمعلمة $m=1.8$. أوجد احتمال بأن الشخص يصطاد أي ساعة (1) ولا سمكة بالمرة (2) على الأكثر سمكتين.