

المقاييس الإحصائية

TENDENCY MEASURES OF CENTRAL **مقاييس النزعة المركزية**

إن الأسلوب البياني في تحليل ودراسة الظواهر لتحديد الخصائص والاتجاهات والعلاقات، يعتمد في دقته على دقة التمثيل البياني نفسه وبذلك ربما تختلف الخصائص من رسم إلى آخر لنفس الظاهرة، وعليه فإنه من الأفضل اللجوء إلى طرق القياس الكمي، حيث يستخدم الباحث الطريقة الرياضية في القياس. فالهدف الأساسي من استخدام مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت هو تلخيص البيانات في محاولة أخرى لوصفها عن طريق التعرف على مركزها ومقدار تشتت البيانات حول هذا المركز (درجة تجانس البيانات) ومن خلال هذين المؤشرين يتمكن الباحث من فهم أبعاد الظاهرة قيد الدراسة.

المتوسطات (مقاييس النزعة المركزية)

- الوسط الحسابي * (Arithmetic Mean The)
- الوسط الحسابي المرجح (The Weighted Mean)
- الوسيط (The Median)
- المنوال (The Mode)
- العلاقة بين المتوسط والوسيط والمنوال: أشكال الالتواء (Skewness)
- الوسط الهندسي (Geometric Mean)
- الوسط التوافقي (Harmonic Mean)
- العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي
- الربيعيات والشعيرات والمئينات (Quartiles, Deciles, Percentiles)

١- الوسط الحسابي (The Arithmetic Mean)

الوسط الحسابي أو الوسط للمجموعة n من الأرقام X_1, X_2, \dots, X_n ويرمز له بالرمز \bar{X} (ويقرأ X bar) ويعرف كالآتي:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum X_i}{n} \quad \dots\dots\dots ١$$

مثال :

الوسط الحسابي للأرقام ١٠, ١٢, ٥, ٣, ٨ هو

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

إذا كانت الأرقام X_1, X_2, \dots, X_k تحدث f_1, f_2, \dots, f_k مرة على الترتيب بمعنى أنها تحدث

(بتكرارات) f_1, f_2, \dots, f_k فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_k X_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i X_i}{n} \quad \dots\dots\dots ٢$$

حيث $n = \sum f_i$ وهو مجموع التكرارات أي مجموع عدد الحالات .

مثال :

إذا كانت ٥, ٨, ٦, ٢، تحدث بتكرارات 3, 2, 4, 1 على الترتيب فإن الوسط الحسابي سيكون:

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = \frac{57}{10} = 5.7$$

٢- الوسط الحسابي المرجح (The Weighted Mean)

في بعض الأحيان نقرن بعض الأرقام X_1, X_2, \dots, X_n بمعاملات ترجيح أو أوزان W_1, W_2, \dots, W_n وهذه تعتمد على الدلالة أو الأهمية المرتبطة بهذه الأرقام، وفي هذه الحالة فإن

$$\bar{X} = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} = \frac{\sum W_i X_i}{\sum W_i} \quad \dots\dots\dots 3$$

يسمى بالوسط الحسابي المرجح . وبلاحظ هنا أوجه الشبه بالمعادلة (٢) التي يمكن اعتبارها وسطاً حسابياً مرجحاً بأوزان f_1, f_2, \dots, f_n .

مثال:

إذا أعطي الامتحان النهائي في مقرر ما وزناً يعادل ثلاثة أمثال الامتحانات الشفهية، وإذا حصل طالب في الامتحان النهائي على ٨٥ وفي الامتحانات الشفهية على ٩٠ و ٧٠ فإن متوسط تقديره هو :

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1 + 1 + 3} = \frac{70 + 90 + 255}{5} = \frac{415}{5} = 83$$

خصائص الوسط الحسابي

١- المجموع الجبري لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

مثال :

انحرافات الأرقام ٨, ٣, ٥, ١٢, ١٠ عن وسطها الحسابي ٧.٦ هي :

$$5 - 7.8 = -2.6, 3 - 7.6 = 4.6, 8 - 7.8 = 0.4,$$

$$12 - 7.6 = 4.4, 10 - 7.6 = 2.4$$

$$\sum (x_i - \bar{x})$$

$$= -2.6 - 4.6 + 0.4 + 4.4 + 2.4$$

$$= -7.2 + 7.2 = 0$$

٢- مجموع مربعات انحرافات مجموعة من الأرقام X عن أي رقم a يكون أصغر ما يمكن في حالة واحدة

فقط إذا كانت $a = \bar{x}$

١- الوسط الحسابي لعدة مجموعات عبارة عن الوسط الحسابي المرجح لكل وسط حسابي لكل مجموعة مرجحاً

بجزم هذه المجموعة

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_k m_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} \quad \dots \dots 4$$

حيث m هي الوسط الحسابي
للجموعة
، f عدد أفراد هذه المجموعة .

مثال :

أخذت عينة عشوائية من خمسين عاملاً من عمال أحد المصانع الحربية فوجد أن متوسط أجر العامل هو ٧٥ ديناراً شهرياً ، ومن عينة أخرى من مائة عامل من عمال أحد مصانع المعلبات فوجد أن متوسط أجر العامل هو ٤٩.٢ ديناراً ، ومن عينة ثالثة لأحد مصانع الحديد والصلب من مائة وخمسين عاملاً ووجد أن متوسط أجر العامل الشهري هو ١٠٥ دنانير .

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي لأجر العامل الشهري في المصانع الثلاثة .

$$\bar{X} = \frac{50 \times 75 + 100 \times 49.2 + 150 \times 105}{50 + 100 + 150}$$

$$\bar{X} = \frac{3750 + 4920 + 15750}{300} = \frac{24420}{300} = 81.400$$

٢- إذا كانت A أي وسط حسابي افتراضي (يمكن أن يكون أي رقم) وإذا كان $d_i = X_i - A$ هو انحرافات

Xj عن A فإن المعادلتين السابقتين (1) ، (2) ستصبحان على الترتيب كما يلي:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = A + \frac{\sum d}{n} \quad \dots \dots \dots ٥$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{\sum f_i} = A + \frac{\sum f d}{n} \quad \dots \dots \dots ٦$$

$$n = \sum_{i=1}^n f_i = \sum f$$

لاحظ أن (٥) و (٦) يمكن تلخيصهما بالمعادلة

$$\bar{X} = A + \bar{d}$$

الوسط الحسابي محسوبا من بيانات مجمعة

عندما تعرض البيانات في جدول توزيع تكراري (كما في المثال القادم)، فإن جميع القيم التي تقع داخل فئة معينة تعتبر مطابقة لمركز الفئة أو منتصف مدى الفئة. الصيغتان (٢) و (٦) يمكن استخدامهما للبيانات

المجموعة إذا اعتبرنا X_i مركز الفئة و f_i التكرار المقابل لها و A أي مركز فئة افتراضي $d_i = X_i - A$

انحرافات X ، والحساب بالصيغتين (٢) و (٦) أي أن $\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$ ، $\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

فئات الوزن	مراكز الفئات X_i	انحرافات $d_i = X_i - A$	التكرارات f_i	$f_i d_i$
60-62	61	-6	5	-30
63-65	64	-3	18	-54
66-68	A=67	0	42	0
69-71	70	3	27	81
72-74	73	6	8	48
المجموع			$n = \sum_{i=1}^k f_i = 100$	$\sum f_i d_i = 45$

يسميان أحيانا بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة على الترتيب.

وإذا كانت أطوال الفئات متساوية وتساوي C ، والانحرافات $d_i = X_i - A$ يمكن التعبير عنها بالصورة

حيث C_u ، يمكن أن يكون عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً أو صفراً، أي $0 \pm 1, 3 \pm, \dots$

وبذلك فإن الصيغة (٦) تصبح

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i u_i}{n} \right) C = A + \left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i u_i}{n} \right) C \quad (7) \dots\dots$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة الترميز عند حساب الوسط الحسابي، وهي طريقة مختصرة جداً وتستخدم في حالة البيانات المجمعة عندما تكون أطوال الفئات متساوية . لاحظ أنه في طريقة الترميز نجد قيم المتغير X تحول إلى قيم المتغير u بالعلاقة $X = A + Cu$.

مثال

يوضح الجدول أدناه أوزان ١٠ طالب في إحدى الجامعات

فئات الأوزان بالكيلوغرام	التكرار (عدد الطلبة)
60-62	5
63-65	8
66-68	42
69-71	27
72-74	8
المجموع	100

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي لأوزان المائة طالب في الجامعة باستخدام (أ) الطريقة المختصرة (ب) طريقة الترميز

يمكن تنظيم الحل كما في الجدول أدناه . دعنا نأخذ A مركز الفئة الثالثة أي ٦٧ (المقابل لأكبر تكرار) ، على الرغم

مركز أي مركز فئة يمكن استخدامه

(أ) باستخدام الطريقة المختصرة

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n}$$

حيث

$$\sum_{j=1}^k f_j = \sum f = n$$

$$\bar{X} = 67 + \frac{45}{100} = 67.45 \text{ kg}$$

(ب) وباستخدام طريقة الترميز

يمكن ترتيب الحل كما في الجدول الآتي:

X	u_j	f_j	$f u_j$
61	-2	5	15-10
64	-1	18	-18
67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
	$u_j = \frac{X_j - 67}{3}$	$n=100$	$\sum f u_j = 15$

وتطبيق صيغة الترميز نحصل على

$$\bar{X} = A + \frac{(\sum f u_j)}{n} C = 67 + \left(\frac{15}{100}\right)(3) = 67.45$$