الفصل الثاني/ القوى والجـــــذور
Chapter 2/ Powers & Roots

" أعطوني خبزا" ومسرحا" ... أعطيكم شعبا" مثقفا" " وليم شكسبير

1) القـوى *Powers*

نظرية دي موفري (De.Movire's Theorem)

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال: أحسب

1- $(1+i)^{10}$

2 - $(1+i)^{-8}$

الحل: أ) نكتب $1+i$ بالصيغة القطبية وذلك بحساب القيمة المطلقة

$$|Z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = r$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore (1+i) = r(\cos\ \theta + i \sin\ \theta)$$

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$$

$$= (2)^5\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32$$

ب) وجدنا من (أ) أن

$$r = \sqrt{2}\ , \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore (1+i)^{-8} = \frac{1}{16}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = \frac{1}{16}(1-0) = \frac{1}{16}$$

مثـال : باستخدام نظرية دي موفري جد $\sin 5\theta, \cos 5\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و$\cos\theta$.

الحل:

باستخدام المتطابقة $(\cos\theta + i\ \sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$

نجد أن $n = 5$ و $r = 1$

وباستخدام نظرية ذي الحدين والتي تنص :

نجد أن
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\
&= \binom{5}{0}\cos^5\theta + i\binom{5}{1}\cos^4\theta\sin\theta - \binom{5}{2}\cos^3\theta\sin^2\theta - i\binom{5}{3}\cos^2\theta\sin^3\theta \\
&\quad + \binom{5}{4}\cos\theta\sin^4\theta + i\binom{5}{5}\sin^5\theta \\
&= \left(\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\right) + i\left(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\right)
\end{aligned}$$

Then we equate the real and imaginary parts.

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

Finally we use the Pythagorean identity, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2$$
$$\boxed{\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta}$$
$$\sin(5\theta) = 5\left(1-\sin^2\theta\right)^2\sin\theta - 10\left(1-\sin^2\theta\right)\sin^3\theta + \sin^5\theta$$
$$\boxed{\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta}$$

Euler's Formula صيغة اويلر

$$cis\,\theta = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ومن خلال هذه الصيغة يمكن إعادة كتابة العدد المركب بالصيغة آلاتية

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

ومنها يكون النظير الضربي لـ Z هو

$$Z^{-1} = \frac{1}{r\,e^{i\theta}} = \frac{1}{r}\,e^{-i\theta}$$

وحاصل الضرب هو

$$Z_1 Z_2 = r_1 e^{i\theta} \,.\, r_2 e^{i\theta 2}$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$$

وناتج القسمة هو

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta 1}}{r_2 e^{i\theta 2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta 1 - \theta 2)}$$

ملاحظة:

1) من الممكن التعبير عن الدوال المثلثية $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بدلالة الدالة الاسية وبالعكس .

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ ,\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

2) $\left(e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}} \Leftarrow \left(e^{i\theta}\right)^{n} = e^{in\theta}$

3) اذا كانت n عدد صحيح فان

$$\cos\ n\pi = \begin{cases} -1 & ,n\ odd \\ 1 & ,n\ even \end{cases}$$

و كذلك $\sin\ n\pi = 0\ ,\ \forall n$

مثال/ برهن أن $e^{\pi i} = 1$

الحل/ أثناء المحاضرة.

مثال/ اكتب e^z بالصيغة العادية

الحل/ أثناء المحاضرة