أما بالنسبة للقيمة المتوسطة فواضح أن قيمتها تساوي الصفر.

ب ـ تحسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي بالطريقة التالية:

$$U = \int_0^t p\,dt = -\int_0^t 562.5 \sin 2000\,t$$

$$= 562.5 \left[\frac{\cos 2000\,t}{2000} \right]_0^t$$

$$= 0.28\,(\cos 2000\,t - 1) \quad J$$

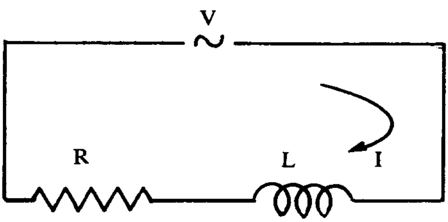
$$= -0.28 \times 2 \sin^2 1000\,t \quad J$$

$$\therefore U = -0.56 \sin^2 1000\,t \quad J$$

(٨ـ٥) التوصيل على التوالي في دائرة مترددة
Conduction in Series in A.C. Circuit

(٨ـ٥ـ١) مقاومة وملف متصلان على التوالي Resistance and inductance in series

يمثل الشكل (٨ـ١١) قوة دافعة مترددة V يتصل بها على التوالي ملف حثه الذاتي L ومقاومة أومية R (هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية للملف أو تكون مقاومة مستقلة إذا كان الملف مقاومته مهملة).



شكل (٨ـ١١): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومقاومة R على التوالي.

وهناك ثلاث طرق لدراسة هذه الدائرة والدوائر المماثلة التي ستأتي فيما بعد وهي:

أولا: طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات).

ثالثا: طريقة الحساب باستخدام الأعداد المركبة، وسوف يخصص البند (٨ـ٨) لهذه الدراسة.

أولا : طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

تكتب معادلة الدائرة بالصورة التالية :

$$V = L\frac{dI}{dt} + IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨-٣٢)$$

فإذا فرض أن جهد المصدر V تمثله المعادلة (٨-١) فإن التيار المار في هذه الدائرة سوف يكون متخلفا عن الجهد بزاوية مقدارها α حيث :

$$I = I_m \sin(\omega t - \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨-٣٣)$$

تسمى α بزاوية الطور وتتراوح قيمتها بين الصفر و$\frac{\pi}{2}$ ، كما هو معروف من دراسة البندين (٨-٢) و(٨-٤) فإن قيمتها تساوي الصفر في حالة المقاومة فقط و$\frac{\pi}{2}$ في حالة الملف فقط.

بالتعويض عن قيمتي V و I من المعادلتين (٨-١) و(٨-٣٣) في المعادلة (٨-٣٢) يمكن الحصول على :

$$V_m \sin\omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + L\, I_m\, \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin\omega t = I_m R\,\{\sin\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \,.\, \sin\alpha\} + L I_m\, \omega\,\{\cos\omega t \cos\alpha + \sin\omega t \sin\alpha\}$$

أو:

$$\sin\omega t\,\{I_m R \cos\alpha + L\, I_m\, \omega \sin\alpha - V_m\} + \cos\omega t\,\{L\, I_m\, \omega \cos\alpha - I_m R \sin\alpha\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون

$$\cos\omega t = 1 \,,\, \sin\omega t = 0$$

عندما تكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$\cos\omega t = 0 \,,\, \sin\omega t = 1$$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$L\,\omega \cos\alpha = R \sin\alpha \quad \cdots\cdots \quad (٨-٣٤)$$

$$V_m = I_m R \cos\alpha + L\, I_m\, \omega \sin\alpha \qquad .. \quad (٨ـ٣٥)$$

فمن المعادلة (٨ـ٣٤) يمكن الحصول على زاوية الطور أي أن :

$$\tan\alpha = \frac{\omega L}{R} \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \quad ... \quad (٨ـ٣٦)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٣٦) على :

$$\sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \& \quad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٣٥) يمكن الحصول على :

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad ...... \quad (٨ـ٣٧)$$

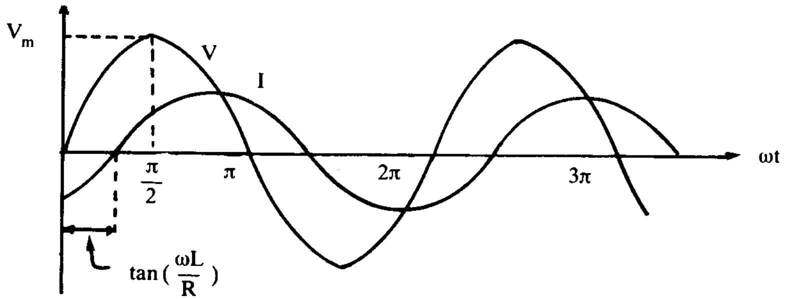
$$V_m = I_m Z$$

حيث :

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad .... \quad (٨ـ٣٨)$$

حيث يعرف المقدار Z بالممانعة الحثية (inductive impedance) وهي تقاس بالأوم أيضا، وتمثل نوعا من أنواع المقاومة في الدائرة.

ويبين الشكل (٨ـ١٢) العلاقة بين الجهد V والتيار I وزاوية الطور α .



شكل (٨ـ١٢): العلاقة بين V ، ωt و I ، ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٣٣) ويوضح الشكل قيمة α بين V و I.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور

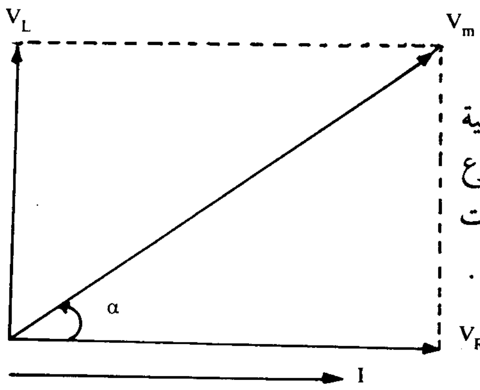
يمكن استخدام مخطط ضابط الطور لحساب الممانعة الحثية Z وزاوية الطور α كما يلي:

لكي يمر التيار الكهربي في الدائرة الموضحة بالشكل (١١ـ٨) يجب أن يكون للقوة الدافعة الكهربية V_m مركبتان هما:

ا ـ جهد المقاومة V_R ومقداره I_mR وهو لازم لتمرير التيار في المقاومة R وكما هو معروف من دراسة البند (٨ـ٢) أن هذا الجهد متفق في الطور مع التيار.

ب ـ جهد الملف الحثي V_L ومقداره $I_m\omega L$ وهو لازم لتمرير التيار في الملف ذي الحث الذاتي L وهذا الجهد متقدم على التيار بزاوية مقدارها π/2 ، البند (٨ـ٤).

وبذلك يمكن رسم مخطط ضابط الطور كما في شكل (١٣ـ٨) حيث أخذ التيار I_m كخط إسناد لأنه مشترك بين R و L.



شكل (١٣ـ٨): مخطط ضابط الطور للدائرة (١١ـ٨) يوضح اتجاه V_R و V_L والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α .

وتكون بذلك القوة الدافعة الكهربية V_m اللازمة لتمرير التيار I_m هي مجموع الجهدين V_R و V_L نظرا لأن الكميات الداخلة في الحساب كلها كميات متجهة.

$$\therefore \vec{V}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

أو

$$V_m = (V_R^2 + V_L^2)^{1/2}$$

$$V_m = [I_m^2 R^2 + I_m^2 (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$V_m = I_m (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} = I_m Z$$

$$\therefore Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

وهي المعادلة (٣٨ـ٨) نفسها. يمكن الحصول على زاوية الطور α من الشكل (١٣ـ٨)، وواضح أنها موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر $(\omega L = 0)$ و $\frac{\pi}{2}$ $(R = 0)$ ، حيث:

$$\tan\alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_m \omega L}{I_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٦) نفسها.
وبهذا يتضح صحة وسهولة فكرة مخطط ضابط الطور في دوائر التيار المتردد.

لإيجاد متوسط القدرة خلال دورة كاملة في هذه الدائرة نتبع ما يلي:

$$P = IV = I_m \sin(\omega t - \alpha)\, V_m \sin\omega t$$

$$P = I_m V_m \sin(\omega t - \alpha) \sin\omega t$$

$$p = \frac{1}{2} I_m V_m \{\cos\alpha - \cos(2\omega t - \alpha)\}$$

$$\therefore\ P = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha - I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha). \quad (٨ـ٣٩)$$

أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين أحدهما $I_{rms} V_{rms} \cos\alpha$ وهو ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني $I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha)$ وهو كمية مترددة فقيمتها المتوسطة خلال دورة كاملة تساوي صفرا. وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة، وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة، هي:

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٤٠)$$

وهذا القانون عام لجميع دوائر التيار المتردد، ويسمى المقدار $\cos\alpha$ **بمعامل القدرة** (power factor) إذ أنـه يمثـل المعامل الذي تتوقف عليه قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة. فإذا كانت الدائرة تحتوي على مقاومة فقط فإن $\alpha = 0$ وتكون $\cos\alpha = 1$ ومـنـه $P = I_{rms} V_{rms}$ وهي المعادلة (٨ـ١٦)، وإذا اشتملت الدائرة على مقاومة وحث ذاتي فإن قيمة α تقع بين الصفر، $\pi/2$ ، كما أن معامل القدرة يتراوح بين الوحدة والصفر، وكلما ازدادت قيمـة الحث الـذاتي بالنسبـة للمقـاومة قلت قيمة معامل القدرة حتى يصبح صفرا: وعندها تكون $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ وذلك عندما تحتوي الدائرة حثا ذاتيا فقط.

مـــثـــال (٤ـ٨)

يتصل جهد متردد قيمته العظمى 100 V وتردده 25 Hz على التوالي بمقاومة قيمتها 1.5 Ω وملف حثه الذاتي 0.01 H.

احسب تيار الدائرة وزاوية فرق الطور وفرق الجهد بين طرفي كل من المقاومة والملف.

الحـــــل

$$\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 25 = 157 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 157 \times 0.01 = 1.57\ \Omega$$

$$Z = \{ (1.5)^2 + (1.57)^2\}^{1/2} = (4.71)^{1/2} = 2.17\Omega$$

$$I_m = \frac{100}{2.17} = 46 \text{ A}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{1.57}{1.5} = 44^\circ 19'$$

$$V_R = I_m R = 46 \times 1.5 = 69 \text{ V}$$

$$V_L = I_m \omega L = 46 \times 1.57 = 72 \text{ V}$$

واضح أن الجمع الجبري للمقدارين V_R و V_L يساوي 141 فونت وهي أكبر من القيمة الأصلية والتي تساوي 100 فولت ولهذا فلابد وأن يكون:

$$V_m^2 = V_L^2 + V_R^2$$

مـــثـــال (٥ـ٨)

تتألف دائرة من عنصرين أساسيين متصلين على التوالي وكان الجهد بين طرفيهما هو $V = 150 \sin (500t + 10)$ V والتيار المار هو $I = 13.42 \sin (500t - 53.4)$ A تعرف على هذين العنصرين.

الحـــــل

واضح أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $53.4 + 10 = 63.4^\circ$

وهذا يعني أن الدائرة يجب أن تحتوي على مقاومة R وملف L. ولمعرفة كل منهما نتبع ما يلي:

$$\tan \alpha = \tan 63.4 = 2 = \omega L/R$$

$$V_m/I_m = \{(R^2 + (\omega L)^2\}^{1/2}$$

$$150/13.42 = \{R^2 + (2R)^2\}^{1/2} = \sqrt{5}R$$

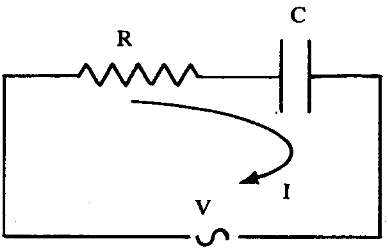
$$\therefore R = 5\Omega \ \ \& \ \ L = \frac{2R}{\omega} = \frac{2 \times 5}{500} = 0.02\,H$$

(٨ـ٥ـ٢) مقاومة ومكثف متصلان على التوالي

Resistance and capacitance in series

يمثل الشكل (٨ـ١٤) دائرة مترددة تحتوي على مصدر متردد V متصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي. فإذا مثل جهد المصدر بالمعادلة (٨ـ١) فإن التيار يسبق الجهد، في هذه الحالة، بزاوية طور قدرها α أي أن:

$$I = I_m \sin(\omega t + \alpha) \quad .. \quad (٨ـ٤١)$$



شكل (٨ـ١٤): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف ومقاومة متصلين على التوالي.

أولا : كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

يمكن كتابة معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصوة التالية:

$$V = IR + \frac{q}{C}$$

حيث q شحنة المكثف و C سعته و R قيمة المقاومة و I و V القيم اللحظية لكل من التيار وجهد المصدر ويمكن كتابة المعادلة (٨ـ٤١) على الصورة

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$q = I_m \int \sin(\omega t + \alpha)\, dt$$

$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + C$$

وقيمة الثابت C في هذه الحالة تساوي الصفر لأن التيار متردد منتظم أي أن :

$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{٨-٤٣})$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٤٢) عن I و V و q يُحصل على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t + \alpha) - \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\therefore V_m \sin \omega t = I_m R \{\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha\}$$

$$- \frac{I_m}{\omega C}\{\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha\}$$

$$\therefore \cos \omega t \{I_m R \sin \alpha - \frac{I_m}{\omega C}\cos \alpha\}$$

$$+ \sin \omega t \{I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin \alpha - V_m\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون $\cos \omega t = 1 , \sin \omega t = 0$

وعندما يكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون $\cos \omega t = 0 , \sin \omega t = 1$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$R \sin \alpha = \frac{1}{\omega C}\cos \alpha \quad \cdots\cdots \quad (\text{٨-١٤٤})$$

$$V_m = I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin \alpha \quad \cdots \quad (\text{٨-٤٤ب})$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-١٤٤) على زاوية الطور حيث :

$$\tan \alpha = \frac{1}{\omega CR} = \frac{X_c}{R} \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR} \quad \cdot \quad (\text{٨-٤٥})$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-٤٥) على :

$$\sin\alpha = \frac{X_c}{\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{R}{\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٤ب ـ ٨) يُحصل على:

$$V_m = I_m\left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} = I_m Z$$

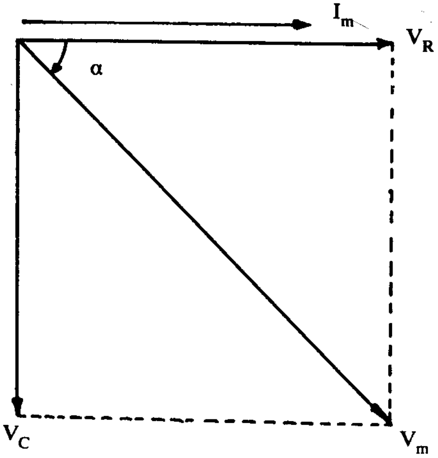
حيث:

$$Z = \left\{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{-}٤٦)$$

حيث Z هي الممانعة السعوية (capacitive impedance) وتقاس بالأوم.

ثانيا: رسم مخطط ضابط الطور

ويمكن الحصول على معادلتي الممانعة السعوية (٨ـ٤٧) وزاوية الطور (٨ـ٤٦) بطريقة رسم مخطط ضابط الطور، شكل (٨ـ١٥)، كالتالي:



شكل (٨ـ١٥): رسم مخطط ضابط الطور بين V_R و V_C والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α التي تتراوح قيمتها بين $-\pi/2$ و 0

يلاحظ أن للجهد V_m مركبتين هما:

ا ـ المركبة V_R وهي التي تعمل على تمرير التيار I_m في المقاومة R وقيمة هذه المركبة I_mR وهي متفقة في الطور مع التيار.

ب ـ المركبة V_C وهي التي تعمل على تمرير التيار في المكثف C وقيمة هذه المركبة

$$V_C = I_m X_C = I_m/\omega C$$

وهي مختلفة في الطور مع التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$.

بجمع هاتين المركبتين جمعا اتجاهيا يمكن الحصول على قيمة الجهد أي أن:

$$V_m = (V_R^2 + V_C^2)^{1/2}$$

$$= \left\{ I_m^2 R^2 + I_m^2 \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= I_m \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\therefore Z = \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٧) نفسها. كما يمكن حساب زاوية الطور من الشكل (٨ـ١٥) حيث:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٦) نفسها.

والقيمة اللحظية للقدرة في الدائرة هي:

$$P = VI$$

$$P = V_m \sin \omega t \, I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos\alpha - \cos(2\omega t + \alpha))$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos\alpha - V_{rms} I_{rms} \cos(2\omega t + \alpha) \qquad (٨ـ٤٧)$$

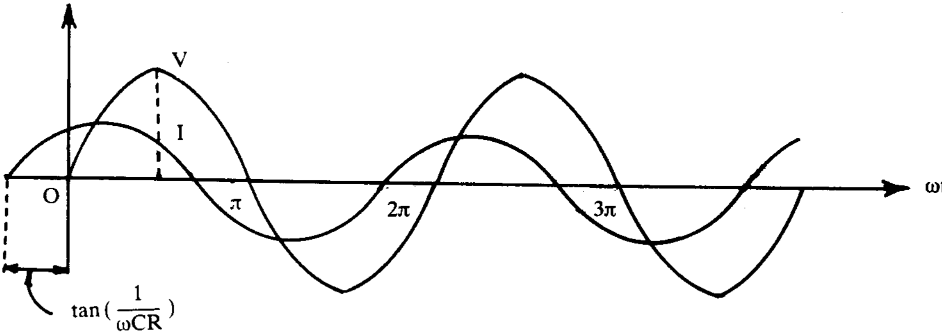
أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين، الحد الأول منهما ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني كمية مترددة وقيمتها المتوسطة صفر.

وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة هي:

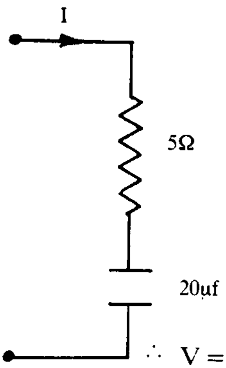
$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\alpha$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٠) نفسها.

ويبين شكل (٨ـ١٦) منحنى التيار والجهد في دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف



شكل (٨ـ١٦): العلاقة بين V ، ωt حسب المعادلة (٨ـ١) و I ، ωt حسب المعادلة (٨ـ٤١) ويوضح الشكل قيمة α بين V ، I.



مـثـــال (٨ـ٦)

يمر في الدائرة التالية تيار قيمته $I = 2 \cos 5000t$ A.

احسب الجهد V المسلط عليها.

الحـــل

$$V = V_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore\ V = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} I_m \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$V = 22.4 \cos(5000\,t - 63.4)\ V$$

حيث

$$R = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}} = 10\Omega$$

$$\&\ \ \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = \tan^{-1}\frac{10}{5} = 63.4° \quad , \quad I_m = 2\,A$$

$$Z = 11.18\ \Omega$$

ويسبق التيار الجهد بزاوية طور مقدارها 63.4°.

والشكل التالي يوضح منحنى التيار والجهد لهذه الدائرة.